

电磁场 与电磁兼容

解 仑 李一玫 主 编
王先梅 副主编



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

电磁场与电磁兼容

解 仑 李一玫 主 编
王先梅 副主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书对电磁场与电磁兼容的基本理论做了系统介绍,全书共有8章,内容包括矢量分析及场论、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变电磁场、电磁兼容基础、电磁兼容滤波器设计、PCB的电磁兼容设计及应用。每章除本章小结外,还附有习题,供读者对相关内容做进一步探讨和复习巩固之用。习题解答和教学用PPT相关资料可在华信教育资源网(www.hxedu.com.cn)下载。

本书可以作为电子、通信、自动化控制等专业的“电磁场理论及应用”课程的本科生教材,也可以作为相近专业的教学参考书。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁兼容/解仑,李一玫主编. —北京:电子工业出版社,2012.6

ISBN 978-7-121-17518-3

I. ①电… II. ①解… ②李… III. ①电磁场—高等学校—教材 ②电磁兼容性—高等学校—教材
IV. ①O441.4 ②TN03

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第147449号

策划编辑:曲 昕

责任编辑:王春宁

印 刷:

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:17 字数:432千字

印 次:2012年6月第1次印刷

定 价:42.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888。

目录

CONTENTS

第 1 章 矢量分析及场论	1
1.1 矢量场和标量场	1
1.1.1 场的分类	1
1.1.2 场的表示方法	2
1.1.3 矢量运算	3
本节思考与练习	5
1.2 正交曲线坐标系	6
1.2.1 直角坐标系	6
1.2.2 圆柱坐标	8
1.2.3 球坐标	10
1.2.4 长度、面和体的微分元及积分	12
本节思考与练习	20
1.3 标量场的梯度	20
1.3.1 方向导数	20
1.3.2 梯度	22
本节思考与练习	24
1.4 矢量场的通量、散度和散度定理	24
1.4.1 通量和通量源	24
1.4.2 散度	25
1.4.3 散度定理	28
本节思考与练习	30
1.5 矢量场的环量、旋度和斯托克斯定理	30
1.5.1 环量和涡旋源	30
1.5.2 旋度	31
1.5.3 斯托克斯定理	36
本节思考与练习	38
1.6 若干定理	38
1.6.1 格林定理	38

1.6.2 唯一性定理	39
1.6.3 亥姆霍兹定理	40
1.7 标量场和矢量场的 MATLAB 基本运算和仿真	41
本节思考与练习	46
本章小结	47
习题一	49
第 2 章 静电场	52
2.1 库仑定律	52
2.1.1 电荷	52
2.1.2 电场强度	53
2.1.3 库仑定律与叠加原理	53
本节思考与练习	55
2.2 真空中静电场的基本方程	56
2.2.1 立体角	56
2.2.2 静电场的通量和散度	57
2.2.3 静电场的环量和旋度	58
本节思考与练习	59
2.3 电位	60
2.3.1 电位的引入及电位的物理意义	60
2.3.2 电位的计算方法	60
本节思考与练习	62
2.4 介质中的高斯定律	62
2.4.1 电偶极子	63
2.4.2 介质的极化	65
2.4.3 介质中的高斯定律	67
2.4.4 本构关系	67
本节思考与练习	69
2.5 静电场的边界条件	69
2.5.1 两种介质分界面上的边界条件	70
2.5.2 介质与导体分界面上的边界条件	71
本节思考与练习	73
2.6 电位的二阶微分方程	73
本节思考与练习	76
2.7 分离变量法	77
2.7.1 直角坐标系分离变量法	77
2.7.2 圆柱坐标系分离变量法	82

2.7.3 球坐标系的分离变量法·····	86
本节思考与练习·····	91
2.8 镜像法·····	92
2.8.1 平面镜像法·····	92
2.8.2 圆柱面镜像法·····	95
2.8.3 球面镜像法·····	97
2.8.4 电轴法·····	98
本节思考与练习·····	100
2.9 多导体系统及部分电容·····	100
2.9.1 电容的概念·····	100
2.9.2 多导体系统间的部分电容·····	102
本节思考与练习·····	104
2.10 静电场能量及静电力·····	104
2.10.1 静电场能量·····	104
2.10.2 静电力·····	106
本节思考与练习·····	108
2.11 静电场的 MATLAB 运算和仿真·····	108
本节思考与练习·····	114
本章小结·····	115
习题二·····	118
第 3 章 恒定电场 ·····	126
3.1 电流密度·····	126
3.1.1 电流强度和电流密度·····	126
3.1.2 电流密度和电荷密度·····	127
3.1.3 欧姆定律和焦耳定律·····	127
本节思考与练习·····	129
3.2 恒定电场的基本方程·····	129
3.2.1 电流连续性方程及恒定电场基本方程·····	129
3.2.2 电动势·····	130
本节思考与练习·····	132
3.3 恒定电场的边界条件·····	132
本节思考与练习·····	134
3.4 恒定电场与静电场的比拟·····	135
本节思考与练习·····	137
3.5 恒定电场的 MATLAB 运算和仿真·····	138
本节思考与练习·····	140

本章小结	140
习题三	142
第4章 恒定磁场	144
4.1 安培力定律、磁感应强度	144
4.1.1 安培力定律	144
4.1.2 磁感应强度、毕奥—沙伐定律	145
4.1.3 洛仑兹力	146
本节思考与练习	148
4.2 真空中磁场的基本方程	149
4.2.1 磁通连续性方程	149
4.2.2 安培环路定律	150
本节思考与练习	153
4.3 矢量磁位	153
4.3.1 矢量磁位	153
4.3.2 磁偶极子	156
本节思考与练习	157
4.4 磁介质中的安培环路定律	157
4.4.1 介质的磁化	157
4.4.2 介质中的安培环路定律	159
本节思考与练习	161
4.5 恒定磁场的边界条件	161
4.5.1 法向边界条件和切向边界条件	162
4.5.2 折射关系	163
4.5.3 用矢量位表示的边界条件	164
本节思考与练习	165
4.6 标量磁位	165
4.6.1 标量磁位及其方程	165
4.6.2 标量磁位的多值性	166
4.6.3 介质磁化的磁荷模型及其标量磁位	167
本节思考与练习	167
4.7 电感	167
4.7.1 自感系数和互感系数	167
4.7.2 自感和互感的计算	169
本节思考与练习	172
4.8 磁场能量和磁场力	172
4.8.1 磁场能量	172

4.8.2 磁场力	175
本节思考与练习	176
4.9 恒定磁场的 MATLAB 运算和仿真	176
本节思考与练习	181
本章小结	181
习题四	183
第 5 章 时变电磁场	187
5.1 法拉第电磁感应定律	187
本节思考与练习	190
5.2 位移电流	191
本节思考与练习	193
5.3 麦克斯韦方程组	194
5.3.1 麦克斯韦方程组	194
5.3.2 本构关系	195
5.3.3 无源区的麦克斯韦方程组	195
5.3.4 无源区的波动方程	196
本节思考与练习	196
5.4 时变电磁场的边界条件	196
5.4.1 两种媒质分界面上的边界条件	197
5.4.2 理想导体表面的边界条件	197
本节思考与练习	199
5.5 动态位电磁波的一般概念	199
5.5.1 动态位方程	199
5.5.2 动态位方程的解	200
5.5.3 平面波的一般概念	202
本节思考和练习	203
本章小结	203
习题五	204
第 6 章 电磁兼容基础	207
6.1 电磁干扰的数学描述方法	207
6.1.1 周期性函数的傅里叶变换	207
6.1.2 非周期性干扰信号的频谱分析	208
6.1.3 脉冲信号的傅里叶积分及快速时/频域转换	209
6.2 分贝的概念与应用	212
6.2.1 分贝的定义及换算关系	212
6.2.2 分贝的应用	215

6.3 电磁环境及电磁污染途径	215
6.3.1 自然电磁环境	215
6.3.2 人为电磁干扰	216
6.3.3 电磁干扰三要素	217
本章小结	218
习题六	219
第7章 电磁兼容滤波器设计	220
7.1 电磁干扰滤波器	220
7.1.1 电磁干扰滤波器的工作原理	220
7.1.2 电磁干扰滤波器的主要特性	220
7.1.3 低通滤波器的结构选择	221
7.2 电磁干扰常用滤波器元件	222
7.2.1 电容器	222
7.2.2 电感	229
7.2.3 滤波连接器	232
7.3 电磁干扰滤波器的选用与安装	236
7.3.1 电磁干扰滤波器的选用	236
7.3.2 电磁干扰滤波器的安装	240
习题七	241
第8章 PCB 的电磁兼容设计及应用	242
8.1 一般设计原则	242
8.1.1 印制电路板的布局和布线	242
8.1.2 单面板和双面板几种地线的分析	245
8.1.3 多层板	250
8.2 旁路和去耦	253
8.2.1 物理特性	253
8.2.2 电容	257
8.2.3 引线电感	257
8.3 变频器应用中的电磁兼容应用	258
8.3.1 干扰来源	258
8.3.2 传播方式	259
8.3.3 电磁兼容对策	260
习题八	262

前 言

随着科学技术的进步，电磁环境日趋复杂，电磁干扰及电磁防护问题日益突出。为了把国内外的技术和学术进展、精辟的见解和分析传播给学生，需要一本新的适用于电子、通信类专业的电磁理论基础课教程，以便使经典理论联系现代的实际。

本书的编写一方面特别注重理论的严密和完整，另一方面也注重讲清概念的物理本质，联系工程实际；通过打好理论基础，增强学生的广泛适应性。编写的思路和所做的工作主要如下：在讲解“场”的内容时首先加强场论的阐述，使之更加严密和条理化，特别是深入浅出、形象化地讲明学生往往感到抽象的概念和定理的物理含义；注重基本概念，强调矢量微分算子这一工具的使用。

静电场的讲法是以场论为纲从数学上概括物理的场，而电场与磁场则作为场论的物理实例；同时在场论的亥姆霍兹定理一节（1.6.3 节）便提出了宏电磁场基本方程，强调指出了电场与磁场的不可分割，因而每种静态场又是统一的时变电磁场的特例，同时也把静态场同准静态场的模型进行了比较。而为了便于学习，减少困难，仍然按静电场（第 2 章）、恒定电场（第 3 章）、恒定磁场（第 4 章）的顺序分别介绍，并把第 3、4 章与第 2 章对应地介绍。第 5 章在总结静态场基本方程的基础上进而导出了时变场的基本方程——麦克斯韦方程组，并对其限定形式做了阐述。第 6 章介绍了电磁兼容的基本概念和基础理论，对电磁干扰三要素和电磁骚扰源进行了分析。第 7 章介绍了电磁干扰滤波器的工作原理与分类，以及一些常用的滤波元器件，并结合实际应用阐述了滤波器的正确选用与安装。第 8 章总结了编者在长期的电路设计工作中的经验，论述了 PCB 的电磁兼容设计的原则、干扰消除、抗串扰和 PCB 接地技术，详细介绍了常见元件的分布参数模型。

本书是编者基于多年教学和科研工作实践，吸收了一些最新的研究成果和工程经验，以原有的本科教学讲义和培训教材为基础编写完成的。本书配有习题解答和教学用 PPT 相关资料，可在华信教育资源网（www.hxedu.com.cn）下载。本书主要由李一玫、解仑、王先梅编写，胡雪、刘欣、许家铭、弓飞、彭晓兰、吕振、闫纪铮、霍磊等参加了部分章节的文字整理工作。

由于电磁内容所涉及的技术领域和服务对象范围非常广，相关的理论和技术发展迅速，加上作者水平有限，因而书中难免存在不妥之处，诚恳欢迎批评、指正。

第 1 章

矢量分析及场论

矢量分析是研究场论的重要数学工具，它以矢量代数为基础，以矢量微积分为主要研究内容，是专门应场论的研究而生的一种数学语言。利用这种语言，可以把千百年来人类观测电磁效应所得出的规律，用简洁明快的符号精确地表述出来。这样做不仅可以使电磁理论系统化，还便于我们对其深刻理解和应用，从而有利于进一步的深入研究和探索。场论是把各种物理的场在数学上抽象成矢量场和标量场来研究，它不仅可以使我们对电场、磁场的认识升华一步，也是进入连续媒质力学（流体、固体力学）、量子力学、热传导、质量传递等领域的数学基础。

➔ 1.1 矢量场和标量场

什么是场？在数学上，一个场就是一个函数；在物理上，场描述在空间某一区域内所有点上的一个物理量（称为场量）。因此，场的重要属性，一是占有一定的空间，二是可以表达成函数形式，并且，除去有限个点、线、面外，场量应处处连续、可微。

1.1.1 场的分类

按照场量在空间是否具有方向，场可分为标量场和矢量场。

标量场的场量是标量，即场域内每个点对应的物理量是一个数。如温度场、密度场、电位场等，都是常见的标量场。

矢量场的场量是矢量，即场域内每个点对应的物理量必须同时用大小和方向来描述。如速度场、加速度场、重力场、电场和磁场等，都是矢量场。

按照场量是否随时间变化，场又可分为静态场和时变场。

静态场的场量不随时间变化，也称时不变场，可分为静态标量场和静态矢量场。本书将在第 2、3、4 章分别讨论由静止电荷产生的静电场和恒定电流产生的恒定电场及恒定磁场。

时变场的场量随时间变化，也称动态场，可分为时变标量场和时变矢量场。本书将在第 5 章讨论有关时变电磁场的理论。

1.1.2 场的表示方法

1. 函数表示法

标量场用标量函数表示,如温度场可表示为 $T(x, y, z)$ (静态场), 密度场可表示为 $\rho(x, y, z, t)$ (时变场)。

矢量场用矢量函数表示。本书中所有矢量均用黑体字表示,如电场强度 $\mathbf{E} = \mathbf{a}_E E$, 其中, \mathbf{a}_E 表示 \mathbf{E} 方向上的单位矢量, $\mathbf{a}_E = \frac{\mathbf{E}}{E}$, E 表示 \mathbf{E} 的模值, 即 $E = |\mathbf{E}|$ 。矢量运算往往在某一坐标系中进行。在正交坐标系中, 一个矢量(场)可以分解为沿着三个坐标轴的分量, 如在直角坐标系中, 有

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{a}_x E_x(x, y, z) + \mathbf{a}_y E_y(x, y, z) + \mathbf{a}_z E_z(x, y, z) \quad (1.1.1)$$

而模值

$$E = |\mathbf{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \quad (1.1.2)$$

应该注意的是, 单位矢量仅表示其模值为 1, 若其方向固定不变, 即为常矢量, 其导数为零; 若其方向随某变量而变化, 则仍是矢量函数, 求导时应按函数进行求导。如

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{a}_E E) = E \frac{\partial \mathbf{a}_E}{\partial r} + \mathbf{a}_E \frac{\partial E}{\partial r} \quad (1.1.3)$$

2. 场图表示法

标量场可用等值线(二维)或等值面(三维)来表示场的分布情况。等值面就是函数值相等的点所构成的曲面, 如标量场 $u(x, y, z) = x + y + z$ 的等值面方程为

$$u(x, y, z) = x + y + z = C(\text{常数}) \quad (1.1.4)$$

这是一族平行平面, 如图 1-1 (a) 所示。又如二维标量场 $u(x, y) = x - y^2$ 的等值线方程为

$$u(x, y) = x - y^2 = C \quad (1.1.5)$$

这是一族抛物线, 如图 1-1 (b) 所示。

矢量场在空间的分布可用矢线来表示。矢线上每一点的切线方向表示该点场量的方向, 场量的大小则用矢线的疏密程度来表示, 矢线密集处表示场量的模值大, 矢线稀疏处表示场量的模值小, 也就是说, 可用垂直穿过单位面积的矢线根数来表示矢量场的大小, 如图 1-1 (c) 所示。

对于时变场, 场图只能表示每一时刻的场的分布。

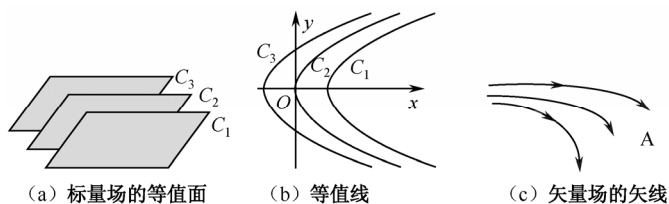


图 1-1 标量场和矢量场

1.1.3 矢量运算

本节将用到矢量的加减法、矢量的数乘、矢量的点乘和叉乘及矢量的微积分, 其中矢量的微积分运算是重点和难点, 将在后面几节重点介绍。

矢量加法 两矢量 A 和 B 相加, 可采用平行四边形法则或三角形法则, 如图 1-2 所示, 使两矢量 A 和 B 的始端重合, 以 A 和 B 为邻边做平行四边形, 其对角线即为和矢量 $C = A + B$; 或通过平移将 A 矢量的末端和 B 矢量的始端相接, 则连接 A 首 B 尾的有向线段即为和矢量。

可以证明, 矢量加法服从加法的交换率和结合率, 即

$$A + B = B + A \quad (1.1.6)$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (1.1.7)$$

矢量减法 矢量差 $D = A - B$, 可写成矢量和的形式, 即 $D = A + (-B)$, 其中 $-B$ 是与 B 大小相等方向相反的矢量, 于是可利用平行四边形法则或三角形法则做加法运算, 如图 1-3 所示。

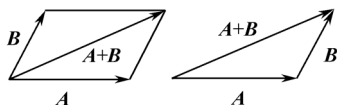


图 1-2 矢量加法

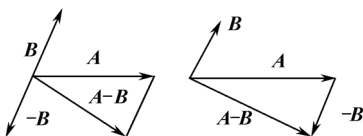


图 1-3 矢量减法

矢量的数乘 一个矢量 A 和一个标量 k 相乘, 结果是一个矢量, 即

$$B = kA \quad (1.1.8)$$

当 $k > 0$ 时, B 和 A 方向相同, 当 $k < 0$ 时, B 和 A 方向相反, 两种情况都称矢量 B 和矢量 A 平行; 而 B 的模值是 A 的 $|k|$ 倍。

两矢量的标量积 两矢量的标量积也称为点积或点乘, 写做 $A \cdot B$, 定义其运算结果为标量, 即

$$A \cdot B = AB \cos \theta \quad (1.1.9)$$

其中, θ 为矢量 A 和 B 之间的较小夹角, 如图 1-4 所示。

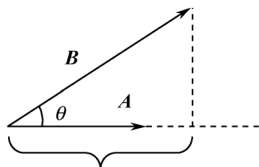


图 1-4 两矢量的标量积

特别地, 若 A 是单位矢量 a_A , 则

$$a_A \cdot B = B \cos \theta = B_A \quad (1.1.10)$$

称为矢量 B 在矢量 A 方向的分量 (标投影), 而

$$(a_A \cdot B) a_A = (B \cos \theta) a_A = B_A a_A \quad (1.1.11)$$

称为矢量 \mathbf{B} 在矢量 \mathbf{A} 方向的分矢量 (矢投影)。利用式 (1.1.10) 和式 (1.1.11) 可写出一个矢量在正交坐标系中沿三个相互垂直的坐标方向的标投影和矢投影。例如, 在直角坐标系中, 若矢量 \mathbf{r} 与 x 、 y 、 z 坐标轴的夹角分别为 α 、 β 、 γ , 则 \mathbf{r} 在 x 、 y 、 z 坐标轴上的分量分别为

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_x = r \cos \alpha$ 、 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_y = r \cos \beta$ 和 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_z = r \cos \gamma$, 于是 \mathbf{r} 在直角坐标系中即可表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_x r \cos \alpha + \mathbf{a}_y r \cos \beta + \mathbf{a}_z r \cos \gamma$$

\mathbf{r} 的单位方向为

$$\mathbf{a}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{a}_x \cos \alpha + \mathbf{a}_y \cos \beta + \mathbf{a}_z \cos \gamma \quad (1.1.12)$$

其中, $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 和 $\cos \gamma$ 称为方向余弦。

式 (1.1.9) 也可用来求出两个非零矢量之间的夹角

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} \quad (1.1.13)$$

当 $\theta = 90^\circ$ 时, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, 因此, 两矢量的标量积是否为零可作为两矢量是否垂直的判断。即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \quad (1.1.14)$$

当 $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ 时, $\theta = 0^\circ$, 可求出矢量的模

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} \quad (1.1.15)$$

标量积的运算服从

$$\text{交换律:} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.1.16)$$

$$\text{分配律:} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1.1.17)$$

两矢量的矢量积 两矢量的矢量积也称为叉积或叉乘, 写做 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, 定义其运算结果为矢量, 其方向垂直于矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 所构成的平面, 且指向由矢量 \mathbf{A} 经 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 间较小夹角按右手螺旋转向 \mathbf{B} 时右手拇指所指的方向, 如图 1-5 所示; 其大小为 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的模值与它们之间较小夹角的正弦之积。即

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta \quad (1.1.18)$$

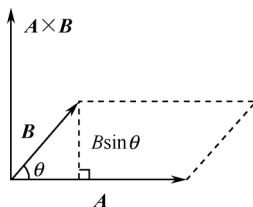


图 1-5 两矢量的矢量积

若以 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 为邻边做平行四边形, 可看出矢量积的模值即是该平行四边形的面积。式 (1.1.18) 也可用来求两矢量间的夹角, 但不如式 (1.1.13) 计算方便。不过, 当 $\theta = 90^\circ$ 时, 若 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的单位矢量分别为 \mathbf{a}_A 、 \mathbf{a}_B , 则其所构成平面的法线方向可直接用叉乘来表示:

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_A \times \mathbf{a}_B \quad (1.1.19)$$

当 $\theta = 0^\circ$ 或 180° 时, $A \times B = 0$ 。因此, 两矢量的矢量积是否为零矢量可作为两矢量是否平行的判据。即

$$A \times B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A // B \quad (1.1.20)$$

当 $B = A$ 时, $\theta = 0^\circ$, 于是

$$A \times A = 0 \quad (1.1.21)$$

矢量积的运算服从分配律, 但不服从交换律:

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (1.1.22)$$

$$A \times B = -B \times A \quad (1.1.23)$$

三矢量的混合积 三个矢量 A 、 B 、 C 的混合积定义为

$$C \cdot A \times B = C \cdot (A \times B) = ABC \sin \theta \cos \varphi \quad (1.1.24)$$

其中, θ 是矢量 A 、 B 间的夹角, φ 是矢量 C 与 $(A \times B)$ 间的夹角。从标量积和矢量积的定义来看, 三矢量的混合积表示以这三个矢量为邻边的平行六面体的体积, 如图 1-6 所示。

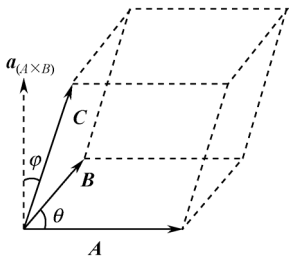


图 1-6 混合积

可以证明, 当运算符号不变, 三矢量循环变换次序 (向左或向右) 时, 混合积的结果不变, 即

$$\begin{aligned} C \cdot (A \times B) &= B \cdot (C \times A) = A \cdot (B \times C) \\ &= -C \cdot (B \times A) = -B \cdot (A \times C) = -A \cdot (C \times B) \end{aligned} \quad (1.1.25)$$

三矢量的二重矢量积 三个矢量 A 、 B 、 C 的二重矢量积定义为按照顺序或优先级做两次叉乘运算, 如 $A \times B \times C$ 或 $A \times (B \times C)$, 可以证明二重矢量积不满足结合律, 但满足下面的恒等式。

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B) \quad (1.1.26)$$

本节思考与练习

1.1 下列物理量哪些是矢量, 哪些是标量?

- (1) 重量; (2) 频率; (3) 功; (4) 速率; (5) 电压; (6) 动量; (7) 能量;
(8) 距离; (9) 磁场强度; (10) 电场力

1.2 画出下列矢量场的图形及其模值的等值线:

- (1) $v(x, y) = a_x x + a_y y$; (2) $v(x, y) = -a_x x - a_y y$

- 1.3 已知 $xa + yb = 0$ ，证明：若 ab 不共面，则 $x = y = 0$ 。
- 1.4 若 O 为三角形 ABC 内任一点，且 P 、 Q 、 R 分别为 AB 、 BC 、 CA 的中点。
 (1) 证明 $OA + OB + OC = OP + OQ + OR$ ；
 (2) 若 O 在三角形外部，上述结果是否成立？证明之。
- 1.5 化简 $(A + B) \cdot (B + C) \times (C + A)$ 。

→ 1.2 正交曲线坐标系

矢量运算定义了矢量之间的加减法和乘法运算规则，通过一般意义上的作图运算，我们可以直观地了解各种矢量运算的结果和意义。但当各种运算交织在一起，运算过程较复杂时，就需要在选定的坐标系中用数学的方法将矢量分解成三个相互垂直的分量来处理，坐标系的选择应以矢量在该坐标系中分解的分量数最少为宜，这样可以减小运算量。本节介绍最常见的三种正交坐标系：直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

正交坐标系中的基本概念：三张正交的曲面称为坐标面，它们相交出三条正交的曲线称为坐标轴。坐标轴上不同位置的识别用坐标变量来表示，坐标变量可以是长度，也可以是角度。坐标轴的方向指向该坐标变量增加的方向，该方向也是坐标变量取任意常数时所得到的相应坐标面的法线方向。坐标轴的交点即为坐标原点。

1.2.1 直角坐标系

直角坐标系由三张正交的平面—— x 坐标面 (yOz 面)、 y 坐标面 (xOz 面) 和 z 坐标面 (xOy 面) 相交成三条正交的直线—— x 轴、 y 轴和 z 轴，它们的正方向分别用单位矢量 a_x 、 a_y 和 a_z 来表示，它们都是常矢量。

空间任意一点的位置 $P(x, y, z)$ 可用由原点指向 P 点的位置矢量 r 来表示，如图 1-7 所示，位置矢量在三个坐标轴上的标投影分别是 x 、 y 和 z ，矢投影分别是 $a_x x$ 、 $a_y y$ 和 $a_z z$ ，于是位置矢量可表示为

$$r = a_x x + a_y y + a_z z \quad (1.2.1)$$

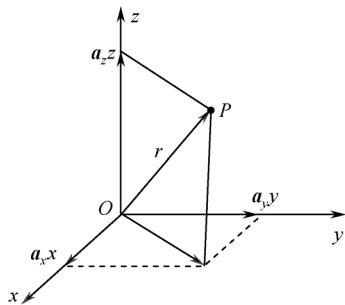


图 1-7 直角坐标系

类似地, 若矢量函数 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 在任意点的标投影分别为 $A_x(x, y, z)$, $A_y(x, y, z)$ 和 $A_z(x, y, z)$, 则可表示为

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{a}_x A_x(x, y, z) + \mathbf{a}_y A_y(x, y, z) + \mathbf{a}_z A_z(x, y, z) \quad (1.2.2)$$

矢量加减法 若矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z \quad (1.2.3a)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z \quad (1.2.3b)$$

则

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{a}_x (A_x \pm B_x) + \mathbf{a}_y (A_y \pm B_y) + \mathbf{a}_z (A_z \pm B_z) \quad (1.2.3c)$$

矢量乘法 由于三个单位矢量相互正交, 任意两个点积为

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_z = 1 \quad (1.2.4)$$

或

$$\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_x = 0 \quad (1.2.5)$$

利用以上两式结果和乘法分配律, 矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的点积

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \cdot (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

矢量 \mathbf{A} 的模值

$$A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.2.7)$$

三个单位矢量 \mathbf{a}_x 、 \mathbf{a}_y 和 \mathbf{a}_z 之间呈右手螺旋关系, 其叉积为

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = \mathbf{0} \quad (1.2.8)$$

$$\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_x, \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_y \quad (1.2.9)$$

利用以上两式结果和乘法分配律, 矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的叉积

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z) \times (\mathbf{a}_x B_x + \mathbf{a}_y B_y + \mathbf{a}_z B_z) \\ &= \mathbf{a}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \mathbf{a}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \mathbf{a}_z (A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

上式结果还可以很方便地写成行列式的形式

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.2.11)$$

注意, 上式只是为了方便记忆借用了行列式的形式, 并不具有行列式的性质, 因此只能按照第一行展开。

三矢量的混合积也可写成行列式的形式

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.2.12)$$

1.2.2 圆柱坐标

圆柱坐标系保留了直角坐标系的 z 坐标面，组合了平面极坐标 (ρ, φ) ，空间任一点记做 $P(\rho, \varphi, z)$ ，其中 ρ 是点 P 到 z 轴的垂直距离，也即位置矢量 \mathbf{r} 在 xOy 平面上的投影， $\rho \in [0, +\infty)$ ，单位矢量 \mathbf{a}_ρ 向外指向 ρ 增加的方向， ρ 坐标面是半径 ρ 为常数的圆柱面； φ 是点 P 的位置矢量 \mathbf{r} 在 xOy 平面上的投影与正 x 轴之间的夹角， $\varphi \in [0, 2\pi]$ ，规定 P 点反时针转时 φ 角增大，单位矢量 \mathbf{a}_φ 指向圆柱坐标面与 z 坐标面相交出的圆的切线方向， φ 坐标面是 φ 角为常数且过 z 轴的半平面，如图 1-8 所示。

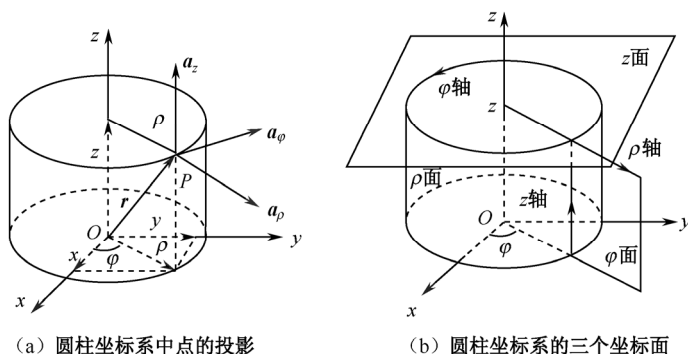


图 1-8 圆柱坐标系

从图中可以得出圆柱坐标和直角坐标变量之间的关系，有

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (1.2.13)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (1.2.14)$$

位置矢量可表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_\rho \rho + \mathbf{a}_z z \quad (1.2.15)$$

而三个单位矢量 \mathbf{a}_ρ 、 \mathbf{a}_φ 和 \mathbf{a}_z 之间呈右手螺旋关系，因此其叉积为

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_z = \mathbf{0} \quad (1.2.16)$$

$$\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_z, \quad \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_z = \mathbf{a}_\rho, \quad \mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_\varphi \quad (1.2.17)$$

应该注意的是， \mathbf{a}_ρ 和 \mathbf{a}_φ 的模值都是 1，但方向却随 φ 角的不同而变化，因此不是常矢量，而是 φ 的函数。

圆柱坐标系中任意一点处两个矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的加、减、乘等运算与直角坐标系相类似。事实上，在正交坐标系中，若将三个正交的单位矢量分别用 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 和 \mathbf{a}_3 表示，矢量 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 写为 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 A_1 + \mathbf{a}_2 A_2 + \mathbf{a}_3 A_3$ 和 $\mathbf{B} = \mathbf{a}_1 B_1 + \mathbf{a}_2 B_2 + \mathbf{a}_3 B_3$ ，则矢量运算可用下列通式来表示：

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{a}_1 (A_1 \pm B_1) + \mathbf{a}_2 (A_2 \pm B_2) + \mathbf{a}_3 (A_3 \pm B_3) \quad (1.2.18)$$

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.2.19)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (1.2.20)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (1.2.21)$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (1.2.22)$$

单位矢量的坐标变换 将空间任意一点投影到 xOy 平面上, 单位矢量 \mathbf{a}_ρ 、 \mathbf{a}_φ 沿 x 和 y 轴分解及 \mathbf{a}_x 、 \mathbf{a}_y 沿 ρ 和 φ 轴分解示意图如图 1-9 所示, 从图中可见

$$\mathbf{a}_\rho = \mathbf{a}_x \cos \varphi + \mathbf{a}_y \sin \varphi \quad (1.2.23a)$$

$$\mathbf{a}_\varphi = -\mathbf{a}_x \sin \varphi + \mathbf{a}_y \cos \varphi \quad (1.2.23b)$$

和

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{a}_\rho \cos \varphi - \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi \quad (1.2.24a)$$

$$\mathbf{a}_y = \mathbf{a}_\rho \sin \varphi + \mathbf{a}_\varphi \cos \varphi \quad (1.2.24b)$$

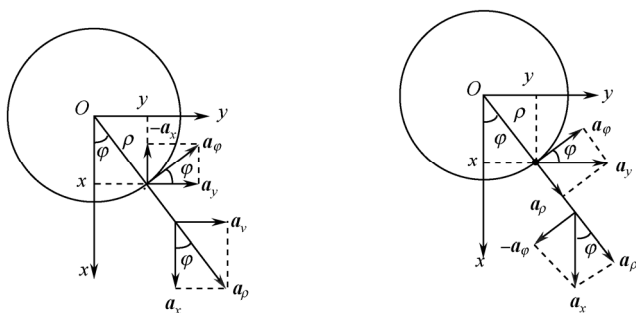


图 1-9 单位矢量的分解

单位矢量的导数 式 (1.2.23) 显示, 单位矢量 \mathbf{a}_ρ 和 \mathbf{a}_φ 是坐标 φ 的函数, 其导数

$$\frac{d\mathbf{a}_\rho}{d\varphi} = -\mathbf{a}_x \sin \varphi + \mathbf{a}_y \cos \varphi = \mathbf{a}_\varphi \quad (1.2.25a)$$

$$\frac{d\mathbf{a}_\varphi}{d\varphi} = -\mathbf{a}_x \cos \varphi - \mathbf{a}_y \sin \varphi = -\mathbf{a}_\rho \quad (1.2.25b)$$

矢量的坐标变换 同一个矢量 \mathbf{A} 在不同的坐标系有不同的表达式, 它在各个坐标系中的投影也不相同。在圆柱坐标中, 矢量 \mathbf{A} 表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho A_\rho + \mathbf{a}_\varphi A_\varphi + \mathbf{a}_z A_z \quad (1.2.26)$$

它在直角坐标系中的投影

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x = A_\rho \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi \quad (1.2.27a)$$

$$A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_y = A_\rho \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi \quad (1.2.27b)$$

类似的方法可以得到

$$A_\rho = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \quad (1.2.28a)$$

$$A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \quad (1.2.28b)$$

1.2.3 球坐标

球坐标系保留了圆柱坐标的 φ 坐标面，组合了位置矢量 \mathbf{r} 及其与正 z 轴的夹角 θ ，空间任一点记做 $P(r, \theta, \varphi)$ ，其中变量 r 是坐标原点到点 P 的距离， $r \in [0, +\infty)$ ，单位矢量 \mathbf{a}_r 指向 r 增加的方向， r 坐标面是半径 r 为常数的球面；变量 θ 是点 P 的位置矢量 \mathbf{r} 与正 z 轴之间的夹角，规定 P 点与 $+z$ 轴重合时 θ 为零， P 点向 $-z$ 轴旋转时 θ 角增大， $\theta \in [0, \pi]$ ，单位矢量 \mathbf{a}_θ 指向 φ 坐标面（半平面）与 r 坐标面（球面）相交出的半圆的切线方向， θ 坐标面是 θ 角为常数所形成的以 z 轴为轴线的圆锥面，如图 1-10 所示。

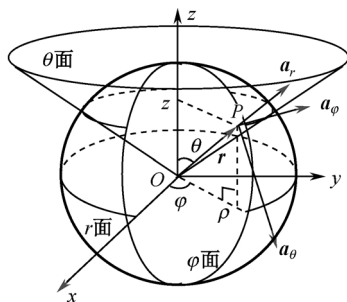


图 1-10 球坐标系

从图 1-10 中可得出球坐标与直角坐标的关系：

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.2.29a)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \sqrt{(x^2 + y^2)/z}, \quad \varphi = \tan^{-1}(y/x) \quad (1.2.29b)$$

位置矢量在球坐标系中的表达式最为简单，即

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}_r r \quad (1.2.30)$$

而三个单位矢量 \mathbf{a}_r 、 \mathbf{a}_θ 和 \mathbf{a}_φ 之间呈右手螺旋关系，因此其叉积为

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{0} \quad (1.2.31)$$

$$\mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\varphi, \quad \mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_r, \quad \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\theta \quad (1.2.32)$$

从图 1-10 可以看出，这三个矢量的方向都随 θ 和 φ 而变化，因此它们不是常矢量，而是 θ 和 φ 的函数。

球坐标系中任意一点处两个矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的加、减、乘等运算与直角坐标和圆柱坐标相类似，参看式(1.2.18)～式(1.2.22)。

单位矢量的坐标变换 将空间任意一点处的单位矢量 \mathbf{a}_r 、 \mathbf{a}_θ 和 \mathbf{a}_φ 沿 x 、 y 和 z 轴分解，如图 1-11 所示（ \mathbf{a}_φ 的分解同圆柱坐标），可得

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\rho \sin \theta + \mathbf{a}_z \cos \theta = \mathbf{a}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{a}_z \cos \theta \quad (1.2.33a)$$

$$\mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_\rho \cos \theta - \mathbf{a}_z \sin \theta = \mathbf{a}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_y \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{a}_z \sin \theta \quad (1.2.33b)$$

$$\mathbf{a}_\varphi = -\mathbf{a}_x \sin \varphi + \mathbf{a}_y \cos \varphi \quad (1.2.33c)$$

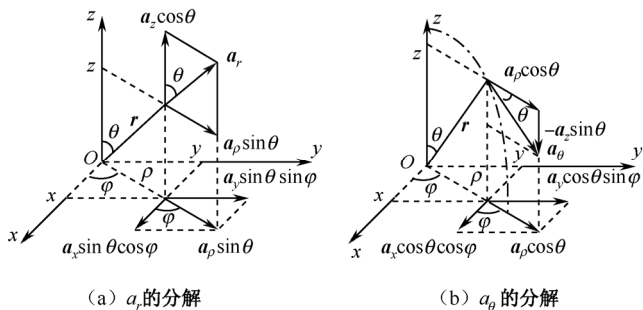


图 1-11 单位矢量的分解

单位矢量的导数 式 (1.2.33) 显示, 单位矢量 \mathbf{a}_r 和 \mathbf{a}_θ 是坐标 θ 和 φ 的函数, \mathbf{a}_φ 是坐标 φ 的函数, 其偏导数

$$\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \theta} = \mathbf{a}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_y \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{a}_z \sin \theta = \mathbf{a}_\theta \quad (1.2.34a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial \varphi} = -\mathbf{a}_x \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{a}_y \sin \theta \cos \varphi = \mathbf{a}_\varphi \sin \theta \quad (1.2.34b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{a}_x \sin \theta \cos \varphi - \mathbf{a}_y \sin \theta \sin \varphi - \mathbf{a}_z \cos \theta = -\mathbf{a}_r \quad (1.2.34c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\theta}{\partial \varphi} = -\mathbf{a}_x \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{a}_y \cos \theta \cos \varphi = \mathbf{a}_\varphi \cos \theta \quad (1.2.34d)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \theta} = 0 \quad (1.2.34e)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}_\varphi}{\partial \varphi} = -\mathbf{a}_x \cos \varphi - \mathbf{a}_y \sin \varphi = -\mathbf{a}_r \sin \theta - \mathbf{a}_\theta \cos \theta \quad (1.2.34f)$$

矢量的坐标变换 在球坐标中, 矢量 \mathbf{A} 表示为

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\varphi A_\varphi \quad (1.2.35)$$

它在圆柱坐标系和在直角坐标系中的投影分别为

$$A_\rho = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\rho = A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta \quad (1.2.36a)$$

$$A_\varphi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_\varphi = A_\varphi \sin \theta \quad (1.2.36b)$$

$$A_z = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta \quad (1.2.36c)$$

和

$$A_x = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x = A_r \sin \theta \cos \varphi + A_\theta \cos \theta \cos \varphi - A_\varphi \sin \varphi \quad (1.2.37a)$$

$$A_y = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_y = -A_r \sin \theta \sin \varphi + A_\theta \cos \theta \sin \varphi + A_\varphi \cos \varphi \quad (1.2.37b)$$

1.2.4 长度、面和体的微分元及积分

微积分是学习电磁场必备的数学工具，在某一坐标系下要完成线、面、体积分的计算，首先要了解长度、面、体微分元是如何构成的。

一、长度、面和体的微分元

设正交坐标系中一点 P 沿任意方向位移了一小段微分距离 $d\mathbf{l}$ 到达 Q 点，则 P 点的三个坐标面与 Q 点的三个坐标面围成一个微分六面体，该六面体的两个顶点 PQ 之间的距离矢量 $d\mathbf{l}$ 称为**矢量线元**；考虑到六个微分面不同的纵横位置，以垂直于面元的法线方向（坐标轴方向）定义其面元方向，则面元与其法线方向的乘积 $\mathbf{a}_i dS = d\mathbf{S}$ 称为**矢量面元**；该微分六面体所围成的体积 $d\tau$ 即为体积元。下面分述在三种坐标系中这些微分元的具体表达。

直角坐标系 如图 1-12 所示，从 P 到 Q 的矢量线元 $d\mathbf{l}$ 在 x 、 y 、 z 轴上的投影分别是 dx 、 dy 和 dz ，因此可写为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_x dx + \mathbf{a}_y dy + \mathbf{a}_z dz \quad (1.2.38)$$

对应坐标面的微分面元分别为

$$dS_x = dydz \quad dS_y = dxdz \quad dS_z = dxdy$$

由于任意的矢量面元 $d\mathbf{S}$ 在直角坐标系中向三个坐标面的投影即是这三个标量面元，因此有

$$d\mathbf{S} = \mathbf{a}_x dS_x + \mathbf{a}_y dS_y + \mathbf{a}_z dS_z \quad (1.2.39)$$

体积元则是三条边的乘积

$$d\tau = dxdydz \quad (1.2.40)$$

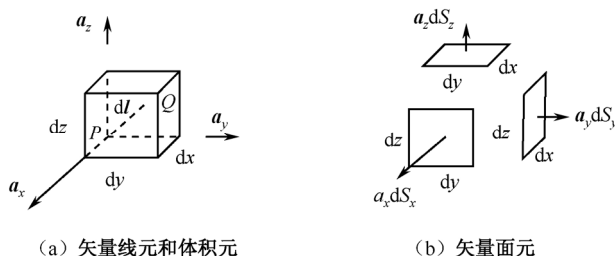


图 1-12 直角坐标系中的微分元

圆柱坐标系 如图 1-13 所示，矢量位移 $d\mathbf{l}$ 在圆柱坐标系中引起的坐标变量的变化分别是 $d\rho$ 、 $d\varphi$ 和 dz ，而 $d\mathbf{l}$ 在 ρ 、 φ 、 z 轴上的投影也即所构成微分六面体的边长分别是 $d\rho$ 、 $\rho d\varphi$ 和 dz ，因此矢量线元可写为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_\rho d\rho + \mathbf{a}_\varphi \rho d\varphi + \mathbf{a}_z dz \quad (1.2.41)$$

对应坐标面的微分面元分别为

$$dS_\rho = \rho d\varphi dz \quad dS_\varphi = d\rho dz \quad dS_z = \rho d\rho d\varphi$$

任意的矢量面元 $d\mathbf{S}$ 可写为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{a}_\rho dS_\rho + \mathbf{a}_\varphi dS_\varphi + \mathbf{a}_z dS_z \quad (1.2.42)$$

体积元是三条边的乘积

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz \quad (1.2.43)$$

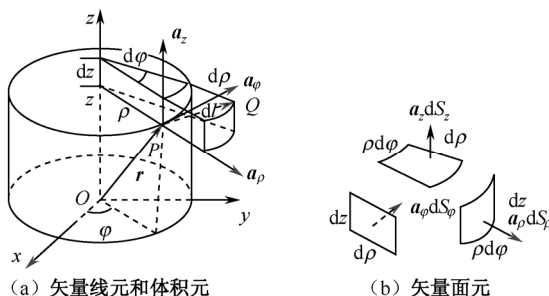


图 1-13 圆柱坐标系中的微分元

球坐标系 如图 1-14 所示, 矢量位移 $d\mathbf{l}$ 在球坐标系中引起的坐标变量的变化分别是 dr 、 $d\theta$ 和 $d\varphi$, 而 $d\mathbf{l}$ 在 r 、 θ 、 φ 轴上的投影也即所构成微分六面体的边长分别是 dr 、 $rd\theta$ 和 $r\sin\theta d\varphi$, 因此矢量线元可写为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\varphi r \sin\theta d\varphi \quad (1.2.44)$$

对应坐标面的微分面元分别为

$$dS_r = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad dS_\theta = r \sin\theta dr d\varphi \quad dS_\varphi = r dr d\theta$$

任意的矢量面元 $d\mathbf{S}$ 可写为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{a}_r dS_r + \mathbf{a}_\theta dS_\theta + \mathbf{a}_\varphi dS_\varphi \quad (1.2.45)$$

体积元是三条边的乘积

$$d\tau = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (1.2.46)$$

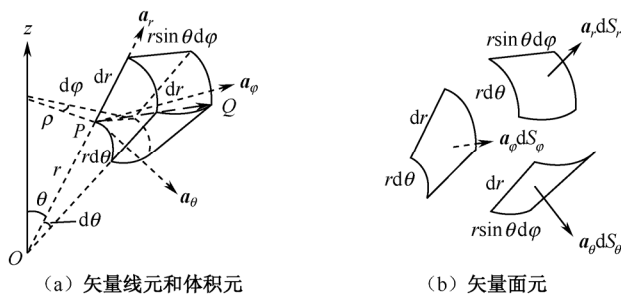


图 1-14 球坐标系中的微分元

为便于记忆, 分析一下坐标变量的微分元与长度元之间的关系, 从图 1-12 至图 1-14 中可以看出, 坐标微分元 dx 、 dy 、 dz 、 $d\rho$ 和 dr 都是长度元, 而 $d\theta$ 和 $d\varphi$ 是角度元, 它们对应的长度元 (其他坐标变量保持不变, 仅由角度变化所划出的弧长) 分别是 $\rho d\varphi$ (圆柱坐标)、 $rd\theta$ 和 $r\sin\theta d\varphi$ (球坐标), 若设正交坐标系的三个坐标变量分别用 u_1 、 u_2 和

u_3 来表示, 并定义长度元 dl_i 与对应的坐标变量微分元 du_i 之间的比值为度量系数 $h_i (i=1,2,3)$, 即

$$h_i = \frac{dl_i}{du_i} \quad (i=1,2,3) \quad (1.2.47)$$

则对任一正交坐标系, 只要知道了度量系数, 即可写出

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_1 h_1 du_1 + \mathbf{a}_2 h_2 du_2 + \mathbf{a}_3 h_3 du_3 \quad (1.2.48)$$

$$dS_1 = \mathbf{a}_1 h_2 h_3 du_2 du_3 \quad dS_2 = \mathbf{a}_2 h_1 h_3 du_1 du_3 \quad dS_3 = \mathbf{a}_3 h_1 h_2 du_1 du_2 \quad (1.2.49)$$

$$d\tau = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (1.2.50)$$

其中,

$$\text{直角坐标系中} \quad h_1 = h_2 = h_3 = 1 \quad (1.2.51)$$

$$\text{圆柱坐标系中} \quad h_1 = 1 \quad h_2 = \rho \quad h_3 = 1 \quad (1.2.52)$$

$$\text{球坐标系中} \quad h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r \sin \theta \quad (1.2.53)$$

二、线积分、面积分和体积分

从数学上讲, 积分就是求和。在表达电磁场的基本定律时, 用场量在区域中的线积分、面积分和体积分来描述各个定律将使电磁场的基本规律更加明确和方便阐述。现在简单讨论本书将要用到的有关线积分、面积分和体积分的概念。

线积分 连续单值函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 的线积分用求和极限表示为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f_i \Delta x_i \quad (1.2.54)$$

式中, f_i 是 $f(x)$ 在线段 $\Delta x_i (\Delta x_i \rightarrow 0)$ 上任意一点的函数值。该积分的几何意义是曲线 $f(x)$ 、直线 $x=a$ 、 $x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积或面积的代数和, 如图 1-15 所示。

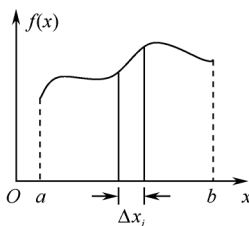


图 1-15 连续单值函数

连续单值矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 沿有向路径 C 从点 P_1 到 P_2 的标量线积分定义为

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta l_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{l}_i = \int_{P_1}^{P_2} A(\mathbf{r}) \cos \theta dl \quad (1.2.55)$$

若矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 是力场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, 则该积分的物理意义表示力 \mathbf{F} 沿曲线路径 C 所做的功。在正交坐标系中

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} &= \int_{P_1}^{P_2} (\mathbf{a}_1 A_1 + \mathbf{a}_2 A_2 + \mathbf{a}_3 A_3) \cdot (\mathbf{a}_1 dl_1 + \mathbf{a}_2 dl_2 + \mathbf{a}_3 dl_3) \\ &= \int_{P_1}^{P_2} (A_1 dl_1 + A_2 dl_2 + A_3 dl_3) \end{aligned} \quad (1.2.56)$$

若路径是闭合的有向曲线, 即 P_1 、 P_2 点重合, 则

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C A \cos \theta dl \quad (1.2.57)$$

称为矢量场 \mathbf{A} 沿环路 C 的**环量**, 也称做**环流**。

除了式 (1.2.54) 和式 (1.2.55) 定义的线积分外, 还有三种线积分类型, 即 $\int_l \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{l}$ 、 $\int_l f(\mathbf{r}) d\mathbf{l}$ 和 $\int_l \mathbf{A}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{l}$, 定义与前两种类似。显然, 这三种积分的结果都是矢量。

例 1.1 求矢量场 $\mathbf{A} = a_x x^2 + a_y y^2 + a_z z^2$ 沿着 xy 面上的一个闭合路径 C 的曲线积分, C 由 $(0, 0)$ 和 $(2, \sqrt{2})$ 之间的一段抛物线 $y^2 = x$ 和两段平行于坐标轴的直线段组成, 如图 1-16 所示。

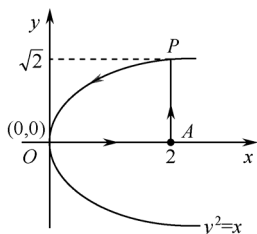


图 1-16 例 1.1 闭合路径 C

解 因为回路在 xy 平面上, $dz = 0$, 故有

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_x dx + A_y dy = x^2 dx + y^2 dy$$

因闭合路径分段连续, 所以, 线积分应分段进行

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^A (x^2 dx + y^2 dy) \Big|_{y=0} + \int_A^P (x^2 dx + y^2 dy) \Big|_{x=2} + \int_P^O (x^2 dx + y^2 dy) \Big|_{y^2=x}$$

式中, 第一项积分段是 $y = 0$ 的直线, 仅对 x 从 0 积到 2; 第二项积分段是 $x = 2$ 直线, 仅对 y 从 0 积到 $\sqrt{2}$; 第三项积分段是 $y^2 = x$ 的曲线, 计算关于 x 或 y 的积分均可, 如选取关于 x 的积分, 则将 $y^2 = x$ 代入式中, 由于

$$y^2 dy = \sqrt{x} dx / 2$$

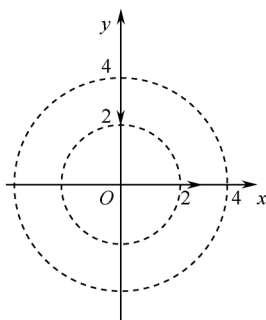
于是

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^2 x^2 dx + \int_0^{\sqrt{2}} y^2 dy + \int_2^0 \left(x^2 + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 + \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}} + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^{3/2}}{3} \right) \Big|_2^0 = 0 \end{aligned}$$

例 1.2 求矢量场 $\mathbf{A} = a_\phi \frac{1}{\rho} + a_z z$ 沿着 z 平面上的一个闭合路径 C 的曲线积分,

(1) C 由半径为 2 的圆组成

(2) C 由半径分别为 2 和 4 的圆在第一象限与坐标轴围成的回路组成, 如图 1-17 所示。


 图 1-17 例 1.2 闭合路径 C

解 圆柱坐标线元矢量 $d\mathbf{l} = \mathbf{a}_\rho d\rho + \mathbf{a}_\varphi \rho d\varphi + \mathbf{a}_z dz$ ，因回路在 z 平面上， $dz = 0$ ，故

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_\varphi \rho d\varphi = d\varphi$$

(1) 沿 $\rho = 2$ 的圆的逆时针路径

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} d\varphi \Big|_{\rho=2} = 2\pi$$

沿 $\rho = 2$ 的圆的顺时针路径

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{2\pi}^0 d\varphi \Big|_{\rho=2} = -2\pi$$

(2) 沿图 1-17 所示的路径，

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \Big|_{\rho=2} + \int_{\pi/2}^0 d\varphi \Big|_{\rho=4} = 0$$

设以上两例中的矢量场是力场，可以这样解释环量的物理意义：当 $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} > 0$ 时，矢量场的方向和路径的方向总体一致，矢量场做正功；当 $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} < 0$ 时，矢量场的方向和路径的方向总体相反，矢量场做负功；当 $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 时，矢量场不做功或所做正功和负功的代数和为零。

面积分 前面我们定义面元矢量为面元的面积与其法线方向的乘积，但是通常一个面元及至一张曲面都是双侧的，如有上侧和下侧之分，或左侧和右侧之分等；一张包围某一空间区域的闭合曲面，也有外侧和内侧之分。这里我们约定：(1) 对开表面，与其边界（必是一闭合曲线）的环绕方向呈右手螺旋关系的一侧的法线方向为矢量面元的方向；(2) 对闭合面，取其外法线方向为矢量面元的方向，如图 1-18 所示。

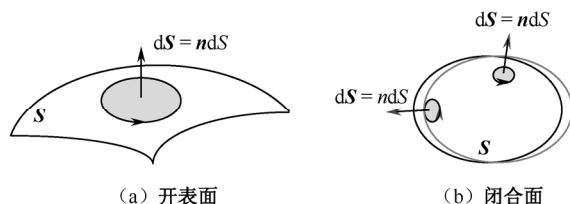


图 1-18 曲面的方向

与矢量场的标量线积分的定义类似, 连续单值矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 对开表面 S 的标量面积分定义为

$$\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cos \theta dS \quad (1.2.58)$$

式中, \mathbf{A}_i 是 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 在 $\Delta \mathbf{S}_i (\Delta S_i \rightarrow 0)$ 上任意一点的矢量。

若矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 是水的流速场 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ (m/s), 则该积分的物理意义表示水流 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ 在单位时间内穿过曲面 S (m^2) 的流量 (m^3/s)。通常, 我们把式 (1.2.58) 称做矢量场 \mathbf{A} 穿过曲面 S 的**通量**。当通量大于零时, 表示矢量场的方向与面积方向总体一致; 当通量小于零时, 表示矢量场的方向与面积方向总体相反, 如图 1-19 所示。

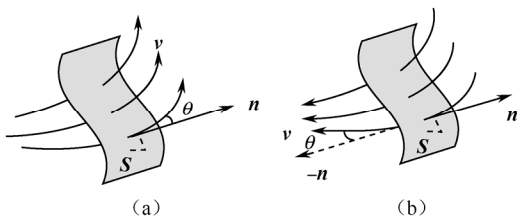


图 1-19 开表面的通量

在正交坐标系中,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_S (\mathbf{a}_1 A_1 + \mathbf{a}_2 A_2 + \mathbf{a}_3 A_3) \cdot (\mathbf{a}_1 dS_1 + \mathbf{a}_2 dS_2 + \mathbf{a}_3 dS_3) \\ &= \int_S (A_1 dS_1 + A_2 dS_2 + A_3 dS_3) \end{aligned} \quad (1.2.59)$$

连续单值矢量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 对闭合面 S 的通量对电磁场的研究至关重要, 记为

$$\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cos \theta dS \quad (1.2.60)$$

我们以矢量线的分布与闭合面的通量的关系来解释通量的物理意义。矢量场中规定矢量线的画法是每根线代表单位面积的通量, 因而穿过某曲面 S 的矢线越多表示通量越大。当 $\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} > 0$ 时, 表示穿出闭合面的矢量线根数比穿入闭合面的矢量线根数多, 因而闭合面内一定有矢量线的起始点; 当 $\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} < 0$ 时, 表示穿入闭合面的矢量线根数比穿出闭合面的矢量线根数多, 因而闭合面内一定有矢量线的终止点; 当 $\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$ 时, 表示穿入闭合面和穿出闭合面的矢量线根数相等, 闭合面内或者没有矢量线的起始点, 或者在闭合面内起始的矢量线根数相等, 如图 1-20 所示。综上所述, 式 (1.2.58) 表示矢量场 \mathbf{A} 穿出闭合面 S 的净通量。

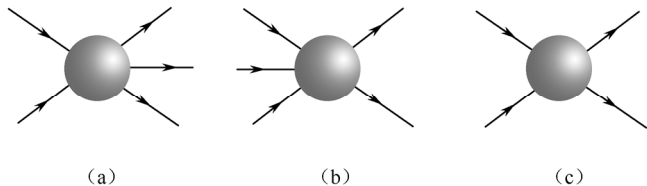


图 1-20 闭合面的通量

除了通量积分和标量面积分 $\int_S f(\mathbf{r})dS$ 之外, 还有三种面积分类型, 即 $\int_S f(\mathbf{r})d\mathbf{S}$ 、 $\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r})d\mathbf{S}$ 和 $\int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{S}$, 定义方式与前两种类似。显然, 这三种积分的结果都是矢量。

例 1.3 证明 $\oint_S d\mathbf{S} = \mathbf{0}$ 。其中 S 是半径为 b 的球面。

证 球面的外法向是球坐标的 \mathbf{a}_r 方向, 因此

$$\oint_S d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{a}_r r^2 \Big|_{r=b} \sin\theta d\theta d\varphi$$

因为单位矢量 \mathbf{a}_r 是 θ 和 φ 的函数, 应将其用直角坐标来表示。由式 (1.2.33a), 有

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_\rho \sin\theta + \mathbf{a}_z \cos\theta = \mathbf{a}_x \sin\theta \cos\varphi + \mathbf{a}_y \sin\theta \sin\varphi + \mathbf{a}_z \cos\theta$$

于是

$$\begin{aligned} \oint_S d\mathbf{S} &= \mathbf{a}_x b^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta + \mathbf{a}_y b^2 \int_0^{2\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta \\ &\quad + \mathbf{a}_z b^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta d\theta = \mathbf{0} \end{aligned}$$

实际上, 也可将 \mathbf{a}_r 变换成圆柱坐标来计算, 即

$$\oint_S d\mathbf{S} = b^2 \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_\rho d\varphi \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta + \mathbf{a}_z b^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta d\theta = \mathbf{0}$$

式中的 $\int_0^{2\pi} \mathbf{a}_\rho d\varphi = \mathbf{0}$, 既可以用直角坐标来证明, 也可以用几何方法直观地理解, 因为

$$\mathbf{a}_\rho(\varphi) + \mathbf{a}_\rho(\pi + \varphi) = \mathbf{0}$$

例 1.4 已知矢量场 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho(e^{-\alpha\rho}/\rho) + \mathbf{a}_z \cos\pi z$, α 为常数。有一个以 z 轴为轴线、半径为 2 的单位长度的圆柱面与 $z = 0$ 、 $z = 1$ 的平面构成的闭合面 S , 求 \mathbf{A} 穿过 S 的通量。

解 此闭合面由三部分光滑曲面构成, 如图 1-21 所示, 其中, 圆柱侧面的面元矢量 $d\mathbf{S}_\rho = \mathbf{a}_\rho \rho d\varphi dz$, 上底面 ($z=1$) 的面元矢量 $d\mathbf{S}_z = \mathbf{a}_z \rho d\varphi d\rho$, 下底面 ($z=0$) 的面元矢量 $d\mathbf{S}_z = -\mathbf{a}_z \rho d\varphi d\rho$ 。于是

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{S_\rho} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_\rho + \int_{S_{z=1}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_z + \int_{S_{z=0}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}_z \\ &= \int_{S_{\rho=2}} \frac{e^{-\alpha\rho}}{\rho} \rho d\varphi dz + \int_{S_{z=1}} \cos(\pi z) \rho d\varphi d\rho - \int_{S_{z=0}} \cos(\pi z) \rho d\varphi d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-2\alpha} d\varphi \int_0^1 dz + \int_0^{2\pi} \cos\pi d\varphi \int_0^2 \rho d\rho - \int_0^{2\pi} \cos 0 d\varphi \int_0^2 \rho d\rho \\ &= 2\pi e^{-2\alpha} - 4\pi - 4\pi = 2\pi(e^{-2\alpha} - 4) \end{aligned}$$

例 1.5 计算面积分 $\int_S \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \cdot d\mathbf{S}$, 其中 S 是半锥角为 θ 的圆锥面在半径为 a 的球面上割出的球冠面积, 如图 1-22 所示。

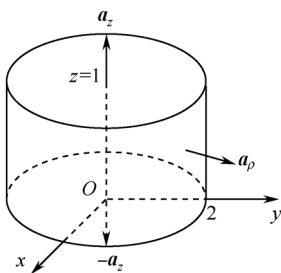


图 1-21 例 1.4 图

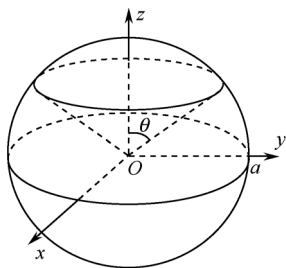


图 1-22 例 1.5 图

解

$$\begin{aligned}\int_S \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \frac{1}{r^2} dS_r \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \frac{1}{a^2} a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \int_0^\theta \sin \theta \, d\theta \\ &= 2\pi(1 - \cos \theta)\end{aligned}$$

特别地, 当 $\theta = \pi$ 时, $\cos \theta = -1$

$$\oint_S \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \quad (1.2.61)$$

该结论可推广到任意闭合面。

体积分 体积分的定义与线积分和面积分类似, 先将给定体积划分成 n 个小体积元, 每个体积元乘以该体积元内任意一点的标量函数 $f(\mathbf{r})$ 或矢量函数 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, 将这些乘积求和后再取极限, 得到标量场的体积分和矢量场的体积分的定义式如下:

$$\begin{aligned}\int_\tau f(\mathbf{r}) d\tau &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta\tau_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f_i \Delta\tau_i \\ \int_\tau \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\tau &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta\tau_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \Delta\tau_i\end{aligned}$$

例 1.6 半径为 a 的球内充满体密度 $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$ 的电荷, 其中 ρ_0 为常数。求球体内的总电量 Q 。

解 对球体积分, 采用球坐标的体积元 $d\tau = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$, 于是总电量

$$\begin{aligned}Q &= \int_\tau \rho(r) d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^a \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi \\ &= 4\pi \int_0^a \rho_0 \left(r^2 - \frac{r^4}{a^2}\right) dr = 4\pi \rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right) \Big|_0^a = \frac{8\pi a^3}{15}\end{aligned}$$

本节思考与练习

- 1.6 求连接点 $(1, 3, 2)$ 与 $(3, 5, 1)$ 的直线与坐标轴所成的锐角。
- 1.7 在圆柱坐标系中描述下列轨迹，并写出其直角坐标方程：
 (1) $\rho = 4, z = 0$; (2) $\rho = 4$; (3) $\varphi = \pi/2$; (4) $\varphi = \pi/3, z = 1$ 。
- 1.8 用球面坐标表示下列轨迹：
 (1) 球 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; (2) 抛物面 $z = x^2 + y^2$; (3) 圆锥 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$;
 (4) 平面 $z = 0$; (5) 平面 $y = x$ 。
- 1.9 已知 $\mathbf{A} = (3x^2 + 6y)\mathbf{a}_x - 14yz\mathbf{a}_y + 20xz^2\mathbf{a}_z$ ，求 $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ 由 $(0, 0, 0)$ 到 $(1, 1, 1)$ 沿下列路径 C 的值：(1) $x = t$; (2) $y = t^2$; (3) $z = t^3$ 。
- 1.10 若区域内给定通量密度 $\mathbf{D} = (2 + 16\rho^2)\mathbf{a}_z$ ，求 \mathbf{D} 穿过在 xy 平面上半径为 $\rho = 2$ 的圆面的总通量 $\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ 。

→ 1.3 标量场的梯度

1.2 节我们讨论了标量场和矢量场的积分问题，这一节及后面两节将研究标量场和矢量场的微分问题。假定这三节内容中所指的所有场函数都满足求导的条件：连续、可微。

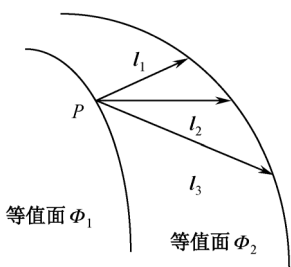
1.3.1 方向导数

本章开始介绍标量场的表示方法时提到，可用等值线或等值面来描述标量场的分布。这一节我们将讨论从一个等值面到达另一个等值面的路径问题，也就是说从某一等值面上的任意一点如何能以最快的速率到达另一等值面，这就涉及到方向导数的概念。

我们熟知，函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = \frac{df}{dx}$ 的几何意义是函数 $f(x)$ 在任意点 x 处切线的斜率，也就是在该点函数沿 x 方向的变化率。将函数 $f(x)$ 推广到一般标量场——多元函数 $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ (其中 u_1, u_2, u_3 是正交坐标系中的三个坐标变量)，将 x 方向推广到一般方向 \mathbf{l} ，则 $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ 沿任意方向的变化率可表示为 $\frac{d\Phi}{dl}$ ，称为 Φ 沿 \mathbf{a}_l 方向的方向导数。下面推导方向导数的表达式。

设图 1-23 所示的是某等值面的局部示意图，从图中可以看出，从等值面 Φ_1 到达 Φ_2 沿路径 \mathbf{l}_1 时函数值的变化率要大于沿路径 \mathbf{l}_2 和 \mathbf{l}_3 。在正交坐标系中，矢量线元的一般表示式为

$$d\mathbf{l} = \mathbf{a}_1 h_1 du_1 + \mathbf{a}_2 h_2 du_2 + \mathbf{a}_3 h_3 du_3$$

图 1-23 Φ 沿不同方向的变化率比较

而标量场 $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ 的全微分为

$$\begin{aligned}
 d\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} du_3 \\
 &= \frac{\partial \Phi}{h_1 \partial u_1} h_1 du_1 + \frac{\partial \Phi}{h_2 \partial u_2} h_2 du_2 + \frac{\partial \Phi}{h_3 \partial u_3} h_3 du_3 \\
 &= \left(a_1 \frac{\partial \Phi}{h_1 \partial u_1} + a_2 \frac{\partial \Phi}{h_2 \partial u_2} + a_3 \frac{\partial \Phi}{h_3 \partial u_3} \right) \cdot (a_1 h_1 du_1 + a_2 h_2 du_2 + a_3 h_3 du_3) \\
 &= \left(a_1 \frac{\partial \Phi}{h_1 \partial u_1} + a_2 \frac{\partial \Phi}{h_2 \partial u_2} + a_3 \frac{\partial \Phi}{h_3 \partial u_3} \right) \cdot d\mathbf{l}
 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

于是, 可得方向导数的计算式

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{dl} &= \left(a_1 \frac{\partial \Phi}{h_1 \partial u_1} + a_2 \frac{\partial \Phi}{h_2 \partial u_2} + a_3 \frac{\partial \Phi}{h_3 \partial u_3} \right) \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dl} \\
 &= \left(a_1 \frac{\partial \Phi}{h_1 \partial u_1} + a_2 \frac{\partial \Phi}{h_2 \partial u_2} + a_3 \frac{\partial \Phi}{h_3 \partial u_3} \right) \cdot \mathbf{a}_l
 \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

式中, $\mathbf{a}_l = \frac{d\mathbf{l}}{dl}$ 是空间任意路径矢量线元 $d\mathbf{l}$ 的单位矢量。

例 1.7 求函数 $f = 12x^2 + yz^2$ 在点 $P(-1, 0, 1)$ 向 $Q(1, 1, 1)$ 方向的变化率。

解 P 、 Q 间的距离矢量

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = a_x(1+1) + a_y(1-0) + a_z(1-1) \\
 &= a_x 2 + a_y
 \end{aligned}$$

其单位方向

$$\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{a_x 2 + a_y}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = a_x \frac{2}{\sqrt{5}} + a_y \frac{1}{\sqrt{5}}$$

直角坐标度量系数 $h_1 = h_2 = h_3 = 1$, 所以, f 在点 P 向 Q 方向的变化率为

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{df}{dR} \right|_P &= \left(a_x \frac{\partial f}{\partial x} + a_y \frac{\partial f}{\partial y} + a_z \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_P \cdot \mathbf{a}_R \\
 &= (a_x 24x + a_y z^2 + a_z 2yz) \Big|_{(-1,0,1)} \cdot \left(a_x \frac{2}{\sqrt{5}} + a_y \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -\frac{47\sqrt{5}}{5}
 \end{aligned}$$

1.3.2 梯度

一、梯度的定义

从上面方向导数的计算式(1.3.2)中可以看出,与单位方向 \mathbf{a}_l 点乘的那个矢量项与 \mathbf{a}_l 并没有直接关系,仅与标量函数对各坐标变量的偏导数及度量系数有关,是标量函数 Φ 对三维空间坐标的一种偏导数运算。将其定义为标量场的**梯度**(gradient),记为 $\text{grad}\Phi$ 或 $\nabla\Phi$,于是可得梯度的计算式

$$\nabla\Phi = \mathbf{a}_1 \frac{\partial\Phi}{h_1\partial u_1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial\Phi}{h_2\partial u_2} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial\Phi}{h_3\partial u_3} \quad (1.3.3)$$

式中

$$\nabla = \mathbf{a}_1 \frac{\partial}{h_1\partial u_1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial}{h_2\partial u_2} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial}{h_3\partial u_3} \quad (1.3.4)$$

称做**矢量微分算子**,也叫做**汉密顿算符**,读做 del 或 Nabla。矢量微分算子 ∇ 本身并没有什么意义,它只是一个运算符号,因此它与其他函数结合的意义须经过定义才能得出。它与标量函数相乘(∇ 在左 Φ 在右时)的定义即是式(1.3.3)。

将常用坐标系的度量系数代入式(1.3.3),可得各正交坐标系中梯度的计算式为

直角坐标

$$\nabla\Phi = \mathbf{a}_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (1.3.5)$$

圆柱坐标

$$\nabla\Phi = \mathbf{a}_\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (1.3.6)$$

球坐标

$$\nabla\Phi = \mathbf{a}_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \quad (1.3.7)$$

有了梯度的定义,方向导数可以简洁地表示为

$$\frac{d\Phi}{dl} = \nabla\Phi \cdot \mathbf{a}_l \quad (1.3.8)$$

而标量场的全微分则为

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot \mathbf{a}_l dl = \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} \quad (1.3.9)$$

这是两个重要的式子,后面会频繁地用到。

二、梯度的性质

利用式(1.3.8)和式(1.3.9)可概括出标量场梯度的下列性质:

- (1) 一个标量场的梯度是一个矢量场;
- (2) 标量场的梯度垂直于该标量场的等值面;
- (3) 梯度的方向与取得最大方向导数的方向一致,且由数值较低的等值面指向数值较高的等值面;
- (4) 梯度的模值是方向导数的最大值;
- (5) 标量场在任意点沿某一方向的方向导数是其梯度在该方向上的投影(分量)。

现在证明上述性质中的第(2)条, 其他性质的证明与此类似, 请自行证明。

证 第(2)条 当 $d\mathbf{l}$ 取在等值面上时, $d\Phi = 0$, 即

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot d\mathbf{l} = 0$$

于是可得

$$\nabla\Phi \perp d\mathbf{l}$$

又因 $d\mathbf{l}$ 是等值面上任意的矢量线元, 所以, $\nabla\Phi$ 和等值面垂直。

例 1.8 求位置矢量 \mathbf{r} 的模值 r 的梯度。

解 在直角坐标系中, $\mathbf{r} = a_x x + a_y y + a_z z$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\begin{aligned}\nabla r &= a_x \frac{\partial r}{\partial x} + a_y \frac{\partial r}{\partial y} + a_z \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= a_x \frac{x}{r} + a_y \frac{y}{r} + a_z \frac{z}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} = a_r\end{aligned}$$

在圆柱坐标中, $\mathbf{r} = a_\rho \rho + a_z z$, $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

$$\begin{aligned}\nabla r &= a_\rho \frac{\partial r}{\partial \rho} + a_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial r}{\partial \phi} + a_z \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= a_\rho \frac{\rho}{r} + a_z \frac{z}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} = a_r\end{aligned}$$

在球坐标中, $\nabla r = a_r \frac{\partial r}{\partial r} + a_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} + a_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial r}{\partial \phi} = a_r$

可见 $\nabla r = a_r$, 梯度本身与坐标无关, 这是一个重要的结论, 后面还会用到。

容易证明, 梯度满足以下运算规则:

$$\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g \quad (1.3.10)$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (1.3.11)$$

$$\nabla f(R) = f'(R)\nabla R \quad (1.3.12)$$

例 1.9 证明 $\mathbf{a}_1 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3$, $\mathbf{a}_2 = h_1 h_3 \nabla u_3 \times \nabla u_1$ 及 $\mathbf{a}_3 = h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2$ 。其中 u_1 、 u_2 和 u_3 是正交坐标系的坐标变量。

证 对 u_1 取梯度, 有

$$\nabla u_1 = a_1 \frac{\partial u_1}{h_1 \partial u_1} + a_2 \frac{\partial u_1}{h_2 \partial u_2} + a_3 \frac{\partial u_1}{h_3 \partial u_3} = \frac{a_1}{h_1}$$

可得

$$\mathbf{a}_1 = h_1 \nabla u_1 \quad (1.3.13a)$$

同理

$$\mathbf{a}_2 = h_2 \nabla u_2 \quad (1.3.13b)$$

$$\mathbf{a}_3 = h_3 \nabla u_3 \quad (1.3.13c)$$

在正交坐标系中有

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$$

把式 (1.3.13) 代入上式, 即可得

$$\mathbf{a}_1 = h_2 h_3 \nabla u_2 \times \nabla u_3 \quad (1.3.14a)$$

$$\mathbf{a}_2 = h_1 h_3 \nabla u_3 \times \nabla u_1 \quad (1.3.14b)$$

$$\mathbf{a}_3 = h_1 h_2 \nabla u_1 \times \nabla u_2 \quad (1.3.14c)$$

本节思考与练习

1.11 已知 $\Phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$, 求在点 $(1, -2, -1)$ 的 $\nabla\Phi$ 及在该点沿 $\mathbf{l} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y$ 方向的方向导数。

1.12 求曲面 $x^2y + 2xz = 4$ 在点 $(2, -2, 3)$ 的单位法向矢量。

➔ 1.4 矢量场的通量、散度和散度定理

矢量场是有方向的场, 那么场的方向是如何确定的? 从哪里开始, 又到哪里终止呢? 本节和下一节我们将讨论矢量场的起源和其数学描述问题。

1.4.1 通量和通量源

在 1.2 节中讨论矢量场的闭合面通量时, 我们曾得出这样的结论, 当 $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \neq 0$ 时, 闭合面 S 内必存在矢量线的起止点。从物理的角度来看, 一个闭合面中能够流出水来, 此闭合面内一定有水源; 一个闭合面能够发出光来, 此闭合面内一定存在光源。那么, 这些能发出或吸收矢量线的点或区域就称做存在**通量源**, 其中能发出矢量线的点称做**源点**, 能吸收矢量线的点称做**汇点**, 源点存在正的源, 汇点存在负的源。

例 1.10 一个与位置矢量成正比的辐射状矢量场 $\mathbf{A} = k\mathbf{r}$, 试分别计算它穿过 (1) 以原点为球心, 半径为 a 的球面的通量; (2) 以原点为球心, 半径为 a 的上半球面与 $z=0$ 平面构成的闭合面的通量, 如图 1-24 所示。

$$\text{解 (1)} \quad \oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{r=a}} k\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{r=a}} ka dS_r = ka4\pi a^2 = 4\pi ka^3$$

$$(2) \quad \oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{r=a}} k\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{z=0}} k\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = ka2\pi a^2 + 0 = 2\pi ka^3$$

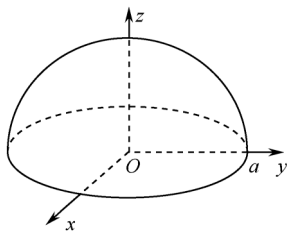


图 1-24 例 1.10 图

可见,不同的闭合面得到的 \mathbf{A} 的通量不相等;即使闭合面形状相同,若所在位置不同,所得到的通量也可能不相等。因此,通量作为积分量只能描述源的宏观概念。

例 1.11 已知矢量场 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho (e^{-\rho\alpha}/\rho) + \mathbf{a}_z \cos \pi z$, α 为常数。有一个以 z 轴为轴线,半径为 2 的单位长度圆柱面与 $z=0$, $z=1$ 的平面构成的闭合面 S , 求 \mathbf{A} 穿过 S 的通量,如图 1-25 所示。

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{S_\rho} A_\rho dS_\rho + \int_{S_{\text{上}}} A_z dS_z - \int_{S_{\text{下}}} A_z dS_z \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{e^{-\alpha\rho}}{\rho} \rho \Big|_{\rho=2} d\phi dz + \int_0^{2\pi} \int_0^2 \cos \pi z \Big|_{z=1} \rho d\rho d\phi \\
 &\quad - \int_0^{2\pi} \int_0^2 \cos \pi z \Big|_{z=0} \rho d\rho d\phi \\
 &= 2\pi e^{-2\alpha} - 4\pi - 4\pi \\
 &= 2\pi(e^{-2\alpha} - 4)
 \end{aligned}$$

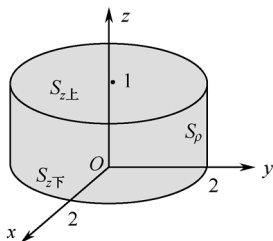


图 1-25 例 1.11 图

1.4.2 散度

一、散度的定义

为了描述通量源在给定空间各个点的具体分布情况,我们采用求通量源密度即单位体积的净通量的方法,将闭合面收小,向某点比如 P 点趋近,使包围这点的体积 $\Delta\tau \rightarrow 0$,则极限

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}{\Delta\tau} \quad (1.4.1)$$

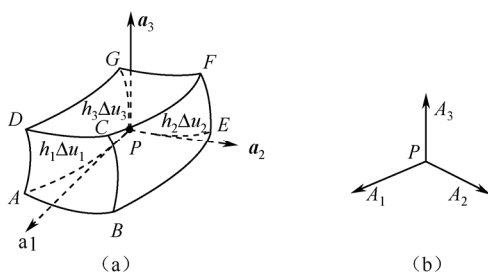
定义为矢量场 \mathbf{A} 的**散度** (divergence)。

二、散度的计算式

在散度的定义式中并没有对包围 P 点的体积形状及体积趋向 P 点的方式作出限制,因此,我们可以这样来构造包含 P 点的体积:在正交坐标系中,以 P 点为顶点,以坐标微分变量所对应的微分线元为邻边,做一个两两平行于坐标面的微分六面体,如图 1-26 所示。

设 P 点矢量场 $\mathbf{A} = a_1 \mathbf{A}_1 + a_2 \mathbf{A}_2 + a_3 \mathbf{A}_3$, 则含有 P 点的三个坐标面上的矢量场的值均为 \mathbf{A} 。矢量场穿过后面的面元的通量为

$$\int_{S_{PEFG}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{A} \cdot (-a_1 \Delta S_1) = -A_1 h_2 h_3 \Delta u_2 \Delta u_3$$


 图 1-26 在正交坐标系中计算 $\text{div} \mathbf{A}$

这个通量沿 \mathbf{a}_{u1} 方向位移 Δu_1 即是矢量场穿过前面的面元的通量的值(注意前后面元方向相反), 于是把矢量场对后面的通量用泰勒级数对 u_1 展开并忽略高阶项, 表示为

$$\int_{S_{ABCD}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A_1 h_2 h_3 \Delta u_2 \Delta u_3 + \frac{\partial(A_1 h_2 h_3 \Delta u_2 \Delta u_3)}{\partial u_1} \Delta u_1$$

于是, 前后一对面元的通量为

$$\int_{S_{PEFG}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{ABCD}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial u_1} \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

类似地, \mathbf{A} 穿过左、右一对面元的净通量为

$$\int_{S_{PGDA}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{BEFC}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial(A_2 h_1 h_3)}{\partial u_2} \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

\mathbf{A} 穿过上、下一对面元的净通量为

$$\int_{S_{CFGD}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{BEPA}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial u_3} \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

把这三个式子相加, 便可得到 \mathbf{A} 穿出微分闭合面的净通量为

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left[\frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 A_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial u_3} \right] \Delta u_1 \Delta u_2 \Delta u_3$$

代入散度的定义式 [式 (1.4.1)], 得到

$$\text{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta \tau} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 A_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial u_3} \right] \quad (1.4.2)$$

实际上, 在以上推导过程中, 也可以在计算矢量场穿过前面的微分面元的通量时, 采用先对矢量场用泰勒级数展开并略去 Δu_1 的高阶项的方法求出 D 点的矢量场, 然后再点乘面积来算出通量, 这样, 矢量场穿过前后一对面元的净通量可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{a}_1 \Delta S_1) + \left(\mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_1} \Delta u_1 \right) \cdot \mathbf{a}_1 \Delta S_1 &= \mathbf{a}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_1} \Delta u_1 \Delta S_1 \\ &= \mathbf{a}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_1} \Delta \tau = \mathbf{a}_1 \frac{\partial}{\partial u_1} \cdot \mathbf{A} \Delta \tau \end{aligned}$$

类似地计算其他两对面对应的通量, 最终可得

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \boldsymbol{A} &= \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta \tau} = a_1 \frac{\partial}{\partial u_1} \cdot \boldsymbol{A} + a_2 \frac{\partial}{\partial u_2} \cdot \boldsymbol{A} + a_3 \frac{\partial}{\partial u_3} \cdot \boldsymbol{A} \\ &= \left(a_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial u_3} \right) \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}\end{aligned}$$

这里, 除了利用 ∇ 的求偏导的运算定义, 还利用了 $\frac{\partial}{\partial u_i} \cdot = \cdot \frac{\partial}{\partial u_i}$ 的运算定义 (该符号前后均应为矢量)。因此, 旋度在坐标系中可写为 ∇ 与矢量的点积形式 (前后顺序不能互换)。

在直角坐标系中, 散度的计算式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.4.3)$$

在圆柱坐标系和球坐标系中分别为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.4.4)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.4.5)$$

三、散度的性质

从散度的定义式 (1.4.1) 可以看出散度具有以下特性:

- (1) 矢量场的散度构成一个标量场;
- (2) 散度的量纲是通量源体密度, 表示某点矢量场穿出单位体积外包面的净通量;
- (3) $\nabla \cdot \boldsymbol{A} \neq 0$ 的点表示存在通量源, 也称为散度源, 该矢量场称为**有源场**或**有散场**;
 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} > 0$ 的点是源点, 能发出矢量线, 是矢量线的起点, 如图 1-27 所示的 P 点;
 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} < 0$ 的点是汇点, 能吸收矢量线, 是矢量线的终点, 如图 1-27 所示的 Q 点;
- (4) $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 的点不存在通量源, 矢量线从该点穿过, 如图 1-27 所示的 M 点; 散度处处为零的矢量场称为**无源场**或**无散场**。

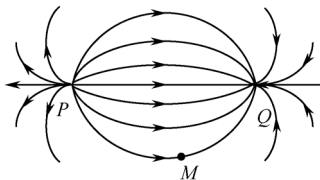


图 1-27 散度的物理意义

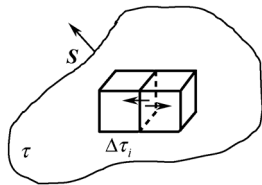


图 1-28 散度定理证明用图

可以证明, 散度运算符合下列规则, 即

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \pm \nabla \cdot \boldsymbol{B} \quad (1.4.6)$$

$$\nabla \cdot (C\boldsymbol{A}) = C\nabla \cdot \boldsymbol{A} \quad (C \text{ 为常数}) \quad (1.4.7)$$

$$\nabla \cdot (f\boldsymbol{A}) = f\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla f \quad (1.4.8)$$

例 1.12 证明 $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0$, 其中 $r \neq 0$ 。

证 将 $\phi = r^{-3}$ 和 $\mathbf{A} = \mathbf{r}$ 代入式 (1.4.8), 可得

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} + \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \cdot \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{r^3} \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 r)}{\partial r} + \mathbf{a}_r \frac{\partial r^{-3}}{\partial r} \cdot \mathbf{r} = 0\end{aligned}$$

例 1.13 如图 1-29 所示, 考虑一个气筒, 突然打开气门, 被压缩的空气的流速是越靠近气门越大。设 $\mathbf{v} = ax k x$, 求 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ 。

解 $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = k$

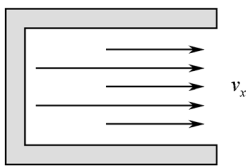


图 1-29 例 1.13 图

例 1.14 如图 1-30 所示, 想象一个爆炸的气球, 设某点处气体的流速同该点与源点的距离成正比, 为 $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = ar k r$, 求 $\nabla \cdot \mathbf{v}$ 。

解 $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 kr)}{\partial r} = 3k$

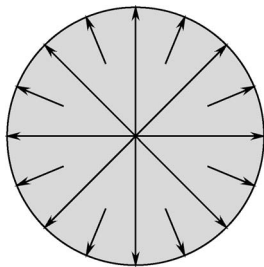


图 1-30 例 1.14 图

1.4.3 散度定理

散度的定义式 (1.4.1) 给出了空间某点附近的通量和通量源密度之间的关系, 若将讨论范围扩大到某闭合面 S 所包围的整个体积 τ , 则可得出一个重要的矢量恒等式

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau \quad (1.4.9)$$

上式称为散度定理, 又称为高斯定理。

证明 将体积 τ 分割成 n 个微分体积元 $\Delta\tau_i$, 如图 1-28 所示, 设其表面 S_i 所包围的

微分体积元内点 P_i 处矢量场的散度为

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_i = \lim_{\Delta \tau_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_i} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}}{\Delta \tau_i} \quad (1.4.10)$$

由极限的定义, 此式可重写为

$$\oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \nabla \cdot \mathbf{A}_i \Delta \tau_i + \varepsilon_i \Delta \tau_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.4.11)$$

式中, ε_i 为无限小值。将 n 个这样的式子相加, 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nabla \cdot \mathbf{A}_i \Delta \tau_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Delta \tau_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nabla \cdot \mathbf{A}_i \Delta \tau_i \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

上式等号左边的微小闭合面积分除呈现在外表面的部分外, 每相邻的两个体积元必有一个公共面元, 在计算来自两边的净通量时相互抵消, 因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.4.13)$$

按照积分的定义, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对体积求和变为对体积积分:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nabla \cdot \mathbf{A}_i \Delta \tau_i = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau \quad (1.4.14)$$

于是得证

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau$$

散度定理建立了矢量场的散度体积分与体积外包面的面积分之间的关系, 表明一个连续可微的矢量场对任意一个闭合面的净通量等于该闭合面所包围体积的散度体积分。在电磁场理论中将多次用到此关系式, 应熟练运用。

例 1.15 如图 1-31 所示, 求矢量场 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_z(x+y+z)$ 穿出旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与 $z = h$ 平面所围包面的通量。

解 通量可利用散度定理通过计算散度的体积分来求得。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 1$$

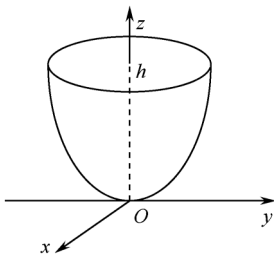


图 1-31 例 1.15 图

计算体积分时,可采用圆柱坐标,在圆柱坐标中,抛物面 $z = x^2 + y^2 = \rho^2$, 积分限可取 $\rho \in [0, \sqrt{z}]$, $z \in [0, h]$ 或 $\rho \in [0, \sqrt{h}]$, $z \in [0, \rho^2]$, 于是

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \int_{\tau} d\tau = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \rho d\rho d\varphi dz \\ &= 2\pi \int_0^h \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{\sqrt{z}} dz = \pi \int_0^h z dz = \frac{1}{2} \pi h^2\end{aligned}$$

本例中,将矢量面积分转化为标量体积分的计算,中间虽有求矢量场散度的计算,但散度是求导运算,相对容易,体积分虽比面积分多了一次积分,但避免了矢量运算,也相对简单。

本节思考与练习

1.13 已知 $\mathbf{A} = a_x 3xyz^2 + a_y 2xy^3 a_y - a_z x^2 yz$, $\Phi = 3x^2 - yz$, 求:

(1) $\nabla \cdot \mathbf{A}$; (2) $\mathbf{A} \cdot \nabla \Phi$; (3) $\nabla \cdot (\Phi \mathbf{A})$ 。

1.14 已知体积 V 内有 $\mathbf{A} = a_x ax + a_y by + a_z cz$, 若 S 为包围体积 V 的闭合曲面, 证明

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = (a + b + c)V$$

➔ 1.5 矢量场的环量、旋度和斯托克斯定理

当矢量场的矢线是闭合曲线时,显然分不出哪里是起点,哪里是终点,这时的矢量场又是从哪里产生的呢?

1.5.1 环量和涡旋源

在 1.2 节中,从矢量场做功的角度说明矢量场的环量所代表的物理意义,直觉上,若 $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$, 则矢量线应该是弯曲的矢线,如水的旋涡中水流的速度及龙卷风的旋涡中风的速度。实际上,产生这种矢量场的根源在于场域中存在一种涡旋源,它使得场的矢线有围绕着它的趋势,这些矢线以涡旋源为对称轴,我们称与该对称轴垂直的面为涡旋面,如图 1-32 (a) 所示。因此, $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0$ 表明环路 C 不包围涡旋源, $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$ 表明环路 C 包围着涡旋源,且当环路 C 所围成的面与涡旋面一致时,环量将达到最大值,而当环路 C 所围成的面与涡旋面垂直时 ($\mathbf{A} \perp d\mathbf{l}$), 环量等于零,如图 1-32 (b) 所示。

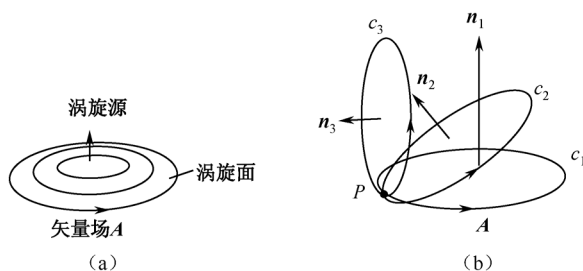


图 1-32 涡旋源、涡旋面和环量

1.5.2 旋度

一、旋度的定义

矢量场的环量是积分量,用它来反映涡旋源的分布会有许多局限性,如环路的形状、位置和环路所围面积的法向等都可能对环量产生影响。因此,为了反映某一点处是否存在涡旋源,以及涡旋面的方向和涡旋源的强度,我们仿照散度定义的方式,将任取的回路 C 收小,向环路所围成的面上的一点 P 趋近,使环路所围面积 $\Delta S_n \rightarrow 0$,这里设环路所围面积的法线方向为 \mathbf{a}_n ,则极限

$$(\text{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{a}_n = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_n} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_n} \quad (1.5.1)$$

表示涡旋面的环量面密度在 \mathbf{a}_n 方向的投影(分量),其中 $\text{rot} \mathbf{A}$ 是涡旋面上的环量面密度,称为矢量场的旋度(rotation 或 curl)。

既然涡旋面有方向,旋度当然是一个矢量,这一点是旋度与散度的重要区别。式(1.5.1)定义了旋度沿某个方向 \mathbf{a}_n 的分量,因此,旋度在正交坐标系中的定义式即为

$$\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_1} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_1} + \mathbf{a}_2 \lim_{\Delta S_2 \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_2} + \mathbf{a}_3 \lim_{\Delta S_3 \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_3} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_3} \quad (1.5.2)$$

式中, C_1 、 C_2 和 C_3 是任意环路 C 分别在三个坐标面上的投影, ΔS_1 、 ΔS_2 和 ΔS_3 分别是这些投影所围的面积。

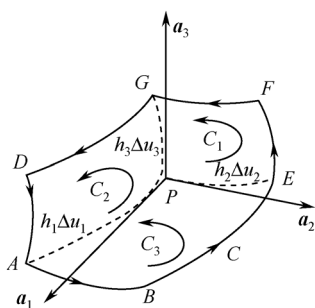
二、旋度的计算式

由于旋度的定义式中对环路的形状没有限制,这样来构造环路,将图 1-25 (a) 计算散度的小体积移去三个面,保留含有 P 点的三个面,如图 1-33 所示。从图中可以看出,当环路 C 向 P 点趋近时,矢量场对环路 C 的环量等于矢量场分别对环路 C 在三个坐标面上的投影环路 C_1 、 C_2 和 C_3 的环量的和。设图中 P 点矢量场为 \mathbf{A} ,下面先来计算这三个小环量。

矢量场对环路 C_1 的环量:

GP 段线积分为

$$\int_{GP} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{a}_3 \Delta l_3) = -A_3 h_3 \Delta u_3$$


 图 1-33 在正交坐标系中计算 $\text{rot} \mathbf{A}$

EF 段线积分可对 PG 段线积分用泰勒级数展开并忽略高阶项表示为（注意两段路经方向相反）

$$\int_{EF} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = A_3 h_3 \Delta u_3 + \frac{\partial(A_3 h_3 \Delta u_3)}{\partial u_2} \Delta u_2$$

同理可得 PE 段线积分为

$$\int_{PE} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_2 \Delta l_2 = A_2 h_2 \Delta u_2$$

及 FG 段线积分为

$$\int_{FG} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = -A_2 h_2 \Delta u_2 - \frac{\partial(A_2 h_2 \Delta u_2)}{\partial u_3} \Delta u_3$$

把四段积分相加，可得

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \frac{\partial(A_3 h_3 \Delta u_3)}{\partial u_2} \Delta u_2 - \frac{\partial(A_2 h_2 \Delta u_2)}{\partial u_3} \Delta u_3 \\ &= \left[\frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_3} \right] \Delta u_2 \Delta u_3 \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_1} = \lim_{\Delta S_1 \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{h_2 h_3 \Delta u_2 \Delta u_3} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_3} \right]$$

类似地，可计算出

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta S_2 \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_2} &= \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_1} \right] \\ \lim_{\Delta S_3 \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_3} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} \right] \end{aligned}$$

把以上三式代入式 (1.5.2)，即可得到旋度在正交坐标系中的计算式为

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{\mathbf{a}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_3} \right] + \frac{\mathbf{a}_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_1} \right] \\
 &\quad + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} \right] = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{a}_1 & h_2 \mathbf{a}_2 & h_3 \mathbf{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \nabla \times \mathbf{A}
 \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

上式最后一个等号的得出利用了对 $\nabla \times \mathbf{A}$ 运算的定义, 即

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\mathbf{a}_1 \frac{\partial}{h_1 \partial u_1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial}{h_2 \partial u_2} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial}{h_3 \partial u_3} \right) \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \times \frac{\partial \mathbf{A}}{h_1 \partial u_1} + \mathbf{a}_2 \times \frac{\partial \mathbf{A}}{h_2 \partial u_2} + \mathbf{a}_3 \times \frac{\partial \mathbf{A}}{h_3 \partial u_3}$$

即 $\frac{\partial}{h_i \partial u_i} \times = \times \frac{\partial}{h_i \partial u_i}$ (该符号前后均应为矢量), 证明略。

这里我们再一次看到了 ∇ 算符的方便之处: 在正交坐标系中, 旋度可写为 ∇ 与矢量的叉积形式 (前后顺序不能互换)。

在直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系中, 旋度的计算式分别为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (1.5.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho \mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad (1.5.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin \theta \mathbf{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix} \quad (1.5.6)$$

三、旋度的性质

从旋度的定义式 (1.5.1) 可以看出旋度具有以下特性:

- (1) 矢量场的旋度是一个矢量场;
- (2) 旋度的量纲是环量面密度, 表示涡旋面单位面积上的环量;
- (3) $\nabla \times \mathbf{A} \neq 0$ 的点表示存在涡旋源, 也称为旋度源, 该矢量场称为有旋场;
- (4) $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ 的点不存在涡旋源; 旋度处处为零的矢量场称为无旋场或保守场。

可以证明旋度运算符合下列运算规则, 有

$$\nabla \times (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \pm \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.5.7)$$

$$\nabla \times (C\mathbf{A}) = C\nabla \times \mathbf{A} \quad (C \text{ 为常数}) \quad (1.5.8)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A} \quad (1.5.9)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.5.10)$$

例 1.16 若标量场 $\Phi(u_1, u_2, u_3)$ 连续可微, 证明 $\nabla \times \nabla \Phi = 0$ 。

证 先由式 (1.3.3) 计算 Φ 的梯度为

$$\nabla \Phi = \mathbf{a}_1 \frac{\partial \Phi}{h_1 \partial u_1} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial \Phi}{h_2 \partial u_2} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial \Phi}{h_3 \partial u_3}$$

再由 (1.5.3) 式计算 $\nabla \Phi$ 的旋度为

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \Phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{a}_1 & h_2 \mathbf{a}_2 & h_3 \mathbf{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} & \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{a}_1 \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_3 \partial u_2} \right) + \mathbf{a}_2 \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_3 \partial u_1} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \partial u_3} \right) + \mathbf{a}_3 \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_2 \partial u_1} \right) \end{aligned}$$

因为 Φ 连续可微, 故有

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_j \partial u_i} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

所以

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0$$

可见, 矢量场 $\nabla \Phi$ 是无旋场或保守场。反之, 若一个矢量场是无旋场, 它一定是某标量场的梯度。即, 若

$$\nabla \times \mathbf{A} = 0$$

则

$$\mathbf{A} = \pm \nabla \Phi$$

式中, (+) 号表示无旋场 \mathbf{A} 的矢线指向 Φ 值增大的梯度方向, (-) 号表示 \mathbf{A} 指向 Φ 值减小的梯度方向, 如图 1-34 所示。

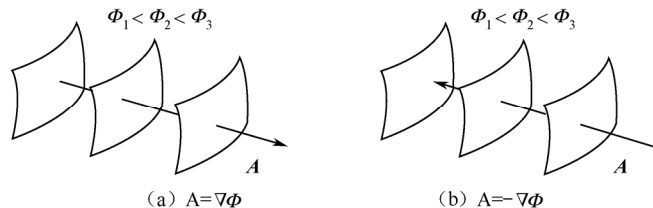


图 1-34 梯度和等值面的关系

例 1.17 矢量场 $\mathbf{A}(u_1, u_2, u_3)$ 连续可微, 证明 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ 。

证 由式 (1.5.3) \mathbf{A} 的旋度为

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{a}_1 & h_2 \mathbf{a}_2 & h_3 \mathbf{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\mathbf{a}_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_3} \right] + \frac{\mathbf{a}_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_1} \right] + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} \right]\end{aligned}$$

由式 (1.4.2) $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 A_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 A_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 A_3)}{\partial u_3} \right]$ 计算 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的散度为

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_3} - \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(A_1 h_1)}{\partial u_2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial^2(A_3 h_3)}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2(A_2 h_2)}{\partial u_1 \partial u_3} + \frac{\partial^2(A_1 h_1)}{\partial u_2 \partial u_3} - \frac{\partial^2(A_3 h_3)}{\partial u_2 \partial u_1} + \frac{\partial^2(A_2 h_2)}{\partial u_3 \partial u_1} - \frac{\partial^2(A_1 h_1)}{\partial u_3 \partial u_2} \right]\end{aligned}$$

因为 \mathbf{A} 连续可微, 故有

$$\frac{\partial^2(A_k h_k)}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2(A_k h_k)}{\partial u_j \partial u_i} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

所以

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

可见, 矢量场 $\nabla \times \mathbf{A}$ 是无散场。反之, 若一个矢量场是无散场, 它一定是某矢量场的旋度。即, 若

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

则

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

除了

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (1.5.11)$$

$$\nabla \times \nabla \Phi = 0 \quad (1.5.12)$$

外, 常见的二阶微分运算还有: $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ 、 $\nabla \cdot \nabla \Phi$ 、 $\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}$ 。记

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 \quad (1.5.13)$$

称做拉普拉斯二阶微分算子 (Laplacian operator)。当 ∇^2 作用于标量函数时, 是用标量场梯度的散度来定义的, 在正交坐标系中的展开式为

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right) \right] \quad (1.5.14)$$

代入各个坐标系中的度量系数, 得到

$$\text{直角坐标系中} \quad \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (1.5.15)$$

$$\text{圆柱坐标系中} \quad \nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (1.5.16)$$

$$\text{球坐标系中} \quad \nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \quad (1.5.17)$$

∇^2 也可以作用于矢量函数, 但意义与作用于标量函数不同 (请参考并矢分析的有关内容), 这里只给出 $\nabla^2 \mathbf{A}$ 在正交坐标系中的表达式为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u_3} \right) \right] \quad (1.5.18)$$

可以看出, 在直角坐标系中, 有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{a}_x \nabla^2 A_x + \mathbf{a}_y \nabla^2 A_y + \mathbf{a}_z \nabla^2 A_z \quad (1.5.19)$$

式中, 等号右边的 ∇^2 与式 (1.5.15) 相同, 即 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。除此之外, $\nabla^2 \mathbf{A}$ 在其他坐标系中都具有极其复杂的形式。一般地, 在运算中也可由矢量恒等式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (1.5.20)$$

得出

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$$

1.5.3 斯托克斯定理

旋度的定义式 (1.5.1) 给出了空间某点附近的环量和环量面密度之间的关系, 若将讨论范围扩大到任意环路 C 所张的曲面面积 S , 则可得出另一个重要的矢量恒等式

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.5.21)$$

称做斯托克斯定理 (Stokes' theorem)。

证明 将环路 C 所张面积分割成 n 个微分矢量面元 $\Delta \mathbf{S}_i = \mathbf{a}_{ni} \Delta S_i$, 则每个面元的外沿都是一个小环路 C_i , 如图 1-35 所示, 设所有小环路 C_i 的环绕方向一致, 则按照旋度的定义式, 微分面元上点 P_i 处矢量场的旋度为

$$\nabla \times \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{a}_{ni} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S_i} \quad (1.5.22)$$

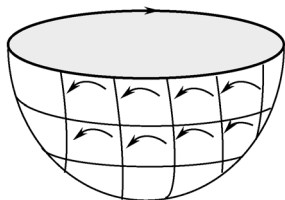


图 1-35 斯托克斯定理证明示意图

由极限的定义, 此式可重写为

$$\oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \nabla \times \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{a}_{ni} \Delta S_i + \varepsilon_i \Delta S_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.5.23)$$

其中, ε_i 是无限小值。将 n 个这样的式子相加并取极限, 得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nabla \times \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \Delta S_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nabla \times \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i \end{aligned} \quad (1.5.24)$$

上式等号左边的微小环量积分除外沿 C 外, 每相邻的两个小环路必有一个公共边, 在计算这两个环路的环量时相互抵消, 因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.5.25)$$

按照积分的定义, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对面积求和变为对面积积分:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \nabla \times \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.5.26)$$

于是得证

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

斯托克斯定理建立了矢量场的旋度面积分与面积外沿的环量之间的关系, 表明一个连续可微的矢量场对任意一个环路的线积分等于该矢量场的旋度对环路所张面积的面积分。斯托克斯定理和散度定理一样, 在电磁场理论推导中是常用的重要数学公式。

另外, 体积分与其外表面的面积分之间还有一个矢量恒等式

$$\int_V (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = - \oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S} \quad (1.5.27)$$

称做**矢量斯托克斯定理**。读者可自行证明。

例 1.18 若 $\mathbf{A} = a_x 2z + a_y 3x + a_z 4y$, 试在半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($z \geq 0$) 上验证斯托克斯定理。

解 半球面的边沿是 $z=0$ 平面上半径为 2 的圆, \mathbf{A} 沿此圆的环量为

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{2\pi} (a_x 2z + a_y 3x + a_z 4y) \cdot \mathbf{a}_\varphi 2d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} a_y 3x \cdot \mathbf{a}_\varphi 2d\varphi \\ &= 2 \int_0^{2\pi} 6 \cos^2 \varphi d\varphi = 12\pi \end{aligned}$$

\mathbf{A} 的旋度为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & 3x & 4y \end{vmatrix} = 4\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z$$

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($z \geq 0$) 的法线方向为 \mathbf{a}_r , 于是面积分

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (4\mathbf{a}_x + 2\mathbf{a}_y + 3\mathbf{a}_z) \cdot \mathbf{a}_r dS_r$$

把式 (1.2.33a) 的 $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{a}_z \cos \theta$ 代入上式, 得

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin \theta \cos \varphi + 2 \sin \theta \sin \varphi + 3 \cos \theta) 2^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 12\pi$$

于是, 有

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

斯托克斯定理得以验证。

本节思考与练习

1.15 求 $\oint_C (3x^2 - 8y^2) dx + (4y - 6xy) dy$, C 为曲线 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = x^2$ 围成的闭合回路

按顺时针方向环绕。

1.16 已知 $\mathbf{A} = (x^2 + y - 4)\mathbf{a}_x + 3xy\mathbf{a}_y + (2xz + z^2)\mathbf{a}_z$, 计算 $\nabla \times \mathbf{A}$ 。

➔ 1.6 若干定理

作为研究电磁场理论强有力的数学工具, 前面两节我们介绍了散度定理和斯托克斯定理, 下面我们将用格林恒等式证明唯一性定理, 并证明亥姆霍兹定理。

1.6.1 格林定理

设矢量场 \mathbf{A} 可以定义成在体积 τ 内和它的表面 S 上是处处连续可微的单值函数 Φ 和 $\nabla \Psi$ 的乘积, 则根据散度定理

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

及

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) = \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi + \Phi \nabla^2 \Psi$$

可得

$$\int_{\tau} \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi d\tau + \int_{\tau} \Phi \nabla^2 \Psi d\tau = \oint_S \Phi \nabla \Psi \cdot d\mathbf{S} \quad (1.6.1)$$

式 (1.6.1) 即称为**格林第一恒等式**。将该式中的 Φ 和 Ψ 对调, 并与式 (1.6.1) 相减, 得**格林第二恒等式**即**格林定理** (Green's theorem) 为

$$\int_{\tau} \Phi \nabla^2 \Psi d\tau - \int_{\tau} \Psi \nabla^2 \Phi d\tau = \oint_S (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) \cdot d\mathbf{S} \quad (1.6.2)$$

特别地, 当 $\Phi = \Psi$ 时, 式 (1.6.1) 变为

$$\int_{\tau} |\nabla \Phi|^2 d\tau + \int_{\tau} \Phi \nabla^2 \Phi d\tau = \oint_S \Phi \nabla \Phi \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \Phi \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (1.6.3)$$

我们将用此公式证明唯一性定理。

1.6.2 唯一性定理

矢量场 \mathbf{A} 在某一区域 τ 中的散度和旋度给定后, 对于包围 τ 的边界面 S , 若已知下列条件之一:

- (1) 矢量场 \mathbf{A} 在全部 S 上的切向 (tangent) 分量 $\mathbf{A}_t|_S$
——称为第一类边界条件 (或 Dirichlet 边界条件);
- (2) 矢量场 \mathbf{A} 在全部 S 上的法向 (normal) 分量 $\mathbf{A}_n|_S$
——称为第二类边界条件 (或 Neumann 边界条件);
- (3) 矢量场 \mathbf{A} 在一部分 S 上的切向分量 $\mathbf{A}_t|_{S_1}$, 在其余 S 上的法向分量 $\mathbf{A}_n|_{S_2}$
——称为第三类边界条件 (或混合边界条件),

则矢量场 \mathbf{A} 在该区域中是唯一确定的。这一结论称为矢量场的**唯一性定理**。

采用反证法, 假定满足上述条件的矢量场有两个: \mathbf{A}_1 和 \mathbf{A}_2 , 只要证明 $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$, 则完成定理证明。令 $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$, 由于 \mathbf{A}_1 和 \mathbf{A}_2 在区域 τ 中具有相同的散度和旋度, 因此

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{A}_1 - \nabla \cdot \mathbf{A}_2 = 0 \quad (1.6.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_1 - \nabla \times \mathbf{A}_2 = 0 \quad (1.6.5)$$

可见 \mathbf{B} 场既无旋也无散。由于 $\nabla \times \mathbf{B} = 0$, \mathbf{B} 便可用一个标量函数的梯度表示。设

$$\mathbf{B} = \nabla \Phi$$

代入式 (1.6.4), 得

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.6.6)$$

把上式代入格林第一恒等式 (1.6.3), 可得

$$\int_{\tau} |\nabla \Phi|^2 d\tau = \oint_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad (1.6.7)$$

对第一类边界条件, 已知 $\mathbf{A}_{1t}|_S = \mathbf{A}_{2t}|_S$, 则

$$\mathbf{B}_t|_S = \nabla \Phi \cdot \mathbf{a}_t|_S = \mathbf{A}_{1t}|_S - \mathbf{A}_{2t}|_S = 0 \quad (1.6.8)$$

上式表明边界面 S 是标量场 Φ 的等值面 (见 1.3 节梯度的性质 2), 于是式 (1.6.7) 可写为

$$\int_{\tau} |\nabla \Phi|^2 d\tau = \Phi|_S \oint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \Phi|_S \oint_S \nabla \Phi \cdot d\mathbf{S} \quad (1.6.9)$$

对上式等号右边应用散度定理, 并注意到式 (1.6.6), 便得

$$\int_{\tau} |\nabla \Phi|^2 d\tau = \Phi|_S \int_{\tau} \nabla \cdot \nabla \Phi d\tau = \Phi|_S \int_{\tau} \nabla^2 \Phi d\tau = 0 \quad (1.6.10)$$

上式中等号左边被积函数 $|\nabla \Phi|^2 \geq 0$, 要满足上式, 只有 $\nabla \Phi = 0$, 即 $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 = 0$,

$A_1 = A_2$ 。

对第二类边界条件, 已知 $A_{1n}|_S = A_{2n}|_S$, 有

$$B_n|_S = \nabla \Phi \cdot \mathbf{a}_n|_S = \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_S = A_{1n}|_S - A_{2n}|_S = 0 \quad (1.6.11)$$

代入式 (1.6.7) 右边积分为零, 同样得到 $A_1 = A_2$ 。

对第三类边界条件, 只要将式 (1.6.7) 等号右边分片积分便可得到同样的结论。于是, 定理得证。

唯一性定理为研究求解电磁场的方法提供了理论依据, 即只要在求解区域内, 矢量场的散度和旋度已确定, 区域的边界条件已知, 则无论采用何种求解方法, 所求得的区域内的场解都是唯一的。

1.6.3 亥姆霍兹定理

唯一性定理中, 若将场域 τ 推广到无限大自由空间, 即分布在有限区域 τ' 中的源 (散度源和涡旋源) 点到场点 (边界面) 的距离 $R \rightarrow \infty$, 则当 Φ 满足 $\Phi \propto \frac{1}{R^{1+\varepsilon}}$ ($\varepsilon > 0$) 时,

$\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \propto \frac{1}{R^{2+\varepsilon}}$, 而此时闭合面积分相当于一个半径趋于无穷大的球面, 有 $dS \propto R^2$, 于是, $\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \propto \frac{1}{R^\varepsilon}$ 。当 $R \rightarrow \infty$ 时, 式 (1.6.7) 等号右边的面积分为零。因此, 在无限大自由空间中, 单值、有界且连续、可导的矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 的解仅由其散度和旋度唯一地确定, 若源分布在有限区域 τ' 中, 则矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.6.12)$$

式中,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad (1.6.13)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad (1.6.14)$$

上述关系称为**亥姆霍兹定理**。该定理不仅反映了唯一性定理的内容, 而且给出了矢量场与其散度和旋度之间的定量关系。

亥姆霍兹定理表明:

(1) 任一矢量场均可表示为一个无旋场和一个无散场之和;

(2) 无限空间中的矢量场由其散度和旋度唯一地确定;

(3) 有限区域中的矢量场由矢量场的散度、旋度和边界条件唯一地确定, 符合唯一性定理。

亥姆霍兹定理为我们研究矢量场提供了最基本的方法, 即唯一地确定一个矢量场, 要首先确定它的散度和旋度。若设矢量场 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 的散度用标量函数 $\rho(\mathbf{r})$ 表示, $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ 的旋度用矢量函数 $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ 表示, 则

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (1.6.15)$$

称为矢量场基本方程的微分形式，而

$$\begin{cases} \oint_S \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\tau'} \rho(\mathbf{r}') d\tau' \\ \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{S'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{S}' \end{cases} \quad (1.6.16)$$

称为矢量场基本方程的积分形式。

在下面各章具体研究电磁场的问题时，都是要找出各个场的基本方程，然后再探讨求解的各种方法及相关问题。

➔ 1.7 标量场和矢量场的 MATLAB 基本运算和仿真

MATLAB 是一套具有极高数值计算功能和可视化功能的软件，对于理解和计算抽象的场有很好的辅助作用。

一、矢量的点乘 dot 和叉乘 cross 运算

MATLAB 软件中的 dot 函数和 cross 函数专门用来计算矢量的点乘和叉乘，用法是 dot(**a**,**b**)和 cross(**a**,**b**)，其中 **a** 和 **b** 是矢量（向量）。

例 1.19 已知 $\mathbf{A} = a_x + 3a_y + 5a_z$ 和 $\mathbf{B} = 2a_x + 4a_y + 6a_z$ ，求（1） $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ；（2） $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ；（3）**A** 和 **B** 之间的夹角。

解 代码如下。

A=[1,3,5];	%矢量 A
B=[2,4,6];	%矢量 B
c=dot(A,B)	%矢量 A 和 B 的点积
D=cross(A,B)	%矢量 A 和 B 的叉积
a=sqrt(dot(A,A));	%矢量 A 的模值
b=sqrt(dot(B,B));	%矢量 B 的模值
theta=acosd(c/(a*b))	%矢量 A 、 B 间的夹角（输出为度，若用 acos 则输出为弧度）

运行结果为

```
c =
    44
D =
    -2     4    -2
theta =
    6.3532
```

二、标量场的等值线 contour 命令和矢量场的矢量线 quiver 命令

1. 对标量函数 $z = z(x,y)$ ，contour 命令的用法是

```
contour(X,Y,Z,n,v)
```

其中, 数值矩阵 X 和 Y 是 x 和 y 的取值范围矩阵, Z 是对应于 X 和 Y 的数值矩阵, 是必须输入的矩阵, 其他参量可选填, n 是绘制等值线的条数, v 是向量, 该向量中元素的个数是 n , 元素的数值是等值线的值。

例 1.20 在 $|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$ 的范围内画出标量场 $z = xe^{-x^2-y^2}$ 的 9 条等值线。

解 代码如下。

```
[X,Y]=meshgrid(-2:0.2:2,-2:0.2:2);    % x,y ∈ [-2,2], 间隔为 0.2
Z=X.*exp(-X.^2-Y.^2);                  % 点 (x, y) 处的函数值 z
v=[-0.4,-0.3,-0.2,-0.1,0,1,0.2,3,0.4]; % 设置向量, 有 9 个等值线的值
[C,h]=contour(X,Y,Z,v);                  % C 是等高线矩阵, h 是等高线句柄
clabel(C,h)                              % 标出等值线数值
```

所画出的等值线图如图 1-36 所示。

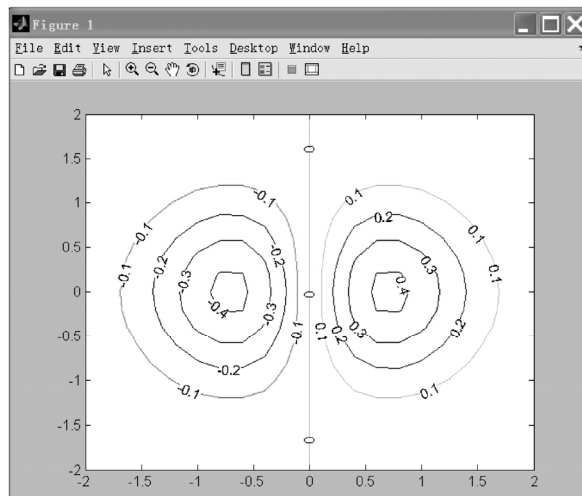


图 1-36 等值线图

2. 对二维矢量函数 $F = a_x U(x, y) + a_y V(x, y)$, **quiver** 命令的用法是

quiver(x,y,u,v)

表示在点 (x, y) 用箭头图形绘制矢量图, u 是 x 方向分量, v 是 y 方向分量。多点绘图时, 可用

quiver(X,Y,U,V,scale)

其中, 数值矩阵 X 和 Y 是自变量 x 和 y 的取值范围矩阵, U 是对应点上 x 方向分量, V 是 y 方向分量, $scale$ 是用来控制矢量线长度的实数, 不填写时默认为 1, 有时为避免重叠, 可设置较小的值。

对三维矢量函数 $F = a_x U(x, y, z) + a_y V(x, y, z) + a_z W(x, y, z)$, 有

quiver3(x,y,z,u,v,w)

三、梯度 gradient、散度 divergence 和旋度 curl 运算

1. 对一个二元函数 $F(x, y)$, 它的梯度 **gradient** 调用格式为

[Fx,Fy]=gradient(F)

其中, \mathbf{F} 是二维矩阵, F_x 是 \mathbf{F} 在 x 方向的偏导数, F_y 是 \mathbf{F} 在 y 方向的偏导数, 并假定自变量的间距是 1。

对一个三元函数 $F(x,y,z)$, 它的梯度 `gradient` 调用格式为

`[Fx,Fy,Fz]=gradient(F)`

其中, \mathbf{F} 是三维矩阵; F_x 是 \mathbf{F} 在 x 方向的偏导数; F_y 是 \mathbf{F} 在 y 方向的偏导数; F_z 是 \mathbf{F} 在 z 方向的偏导数, 并假定自变量的间距是 1。

例 1.21 绘出例 1.20 中标量场的梯度的矢量图。

解 代码如下。

```
[X,Y]=meshgrid(-2:0.2:2,-2:0.2:2);    % x,y ∈ [-2,2], 间隔为 0.2
Z=X.*exp(-X.^2-Y.^2);                % 计算点 (x, y) 处的函数值 z
[DX,DY]=gradient(Z,.2,.2);            % 计算梯度
contour(X,Y,Z)                         % 绘制等值线
hold on                                % 图形保持
quiver(X,Y,DX,DY)                      % 绘制矢量图
```

所绘出的标量场的梯度的矢量图如图 1-37 所示。

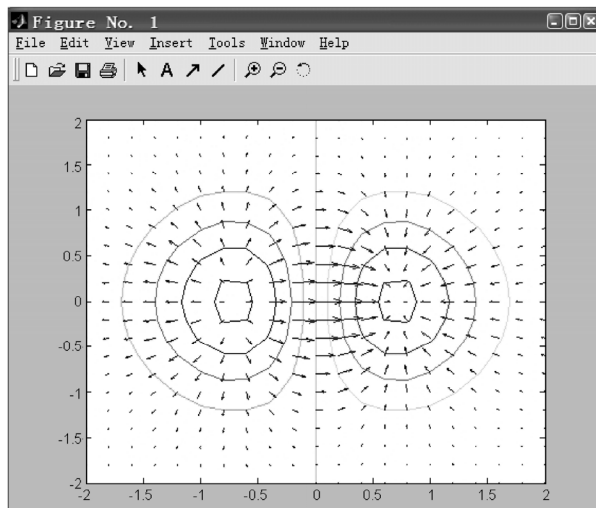


图 1-37 标量场的梯度的矢量图

2. 对一个矢量场 $\mathbf{F} = a_x U(x,y,z) + a_y V(x,y,z) + a_z W(x,y,z)$, 计算它的散度用 `divergence` 命令, 格式为

`div=divergence(X,Y,Z,U,V,W)`

例 1.22 画出矢量场 $\mathbf{A} = e^{-\rho^2} \mathbf{a}_\rho$, 及其散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 的等值线。

解 利用坐标变换公式

$$\mathbf{a}_\rho = a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi = a_x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + a_y \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

矢量场 \mathbf{A} 在直角坐标中的表达式为

$$\mathbf{A} = a_x \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-(x^2 + y^2)} + a_y \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-(x^2 + y^2)}$$

代码如下。

```
%矢量场 A 的矢量图及其散度的等值线
x=linspace(-2,2,21);y=linspace(-2,2,21);           % x,y ∈ [-2,2] 产生等间隔的 21 个点
[X,Y]=meshgrid(x,y);                                % 点 (x, y) 坐标
Ax= exp(-X.^2-Y.^2).*X./sqrt(X.^2+Y.^2+eps);         % 矢量场 A 的 x 分量
Ay= exp(-X.^2-Y.^2).*Y./sqrt(X.^2+Y.^2+eps);         % 矢量场 A 的 y 分量
div=divergence(X,Y,Ax,Ay);                            % 计算 ∇ · A
quiver(X,Y,Ax,Ay,8)                                   % 画 A 的矢量图
Xlim([-2 2]);                                          % 将显示范围限制在网格内
Ylim([-2 2]);
hold on
contour(X,Y,div)                                       % 画等值线
```

所画出的矢量场的矢量图及散度的等值线如图 1-38 所示。

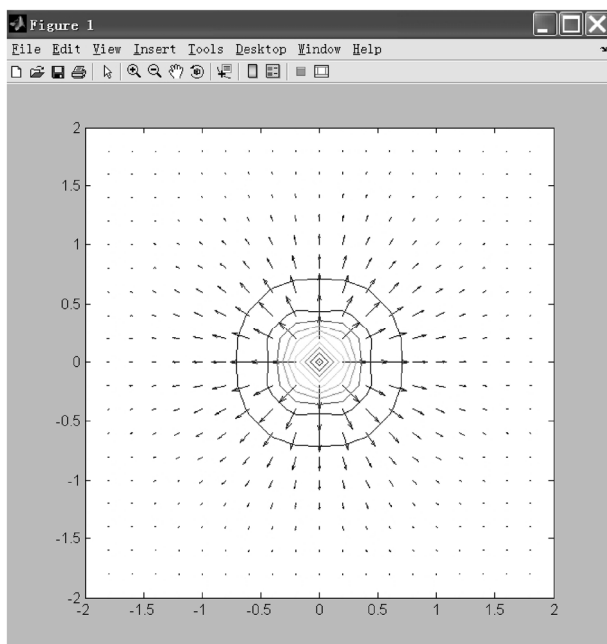


图 1-38 矢量场的矢量图及散度的等值线

3. 对一个矢量场 $\mathbf{F} = a_x U(x, y, z) + a_y V(x, y, z) + a_z W(x, y, z)$ ，计算它的旋度用 **curl** 命令，格式为

```
[curlx,curly,curlz,cav] = curl(X,Y,Z,U,V,W)
```

例 1.23 画出矢量场 $\mathbf{A} = e^{-\rho^2} \mathbf{a}_\varphi$ ，及其旋度 $\nabla \times \mathbf{A}$ 的矢量线。

解 利用坐标变换公式

$$\mathbf{a}_\varphi = -\mathbf{a}_x \sin \varphi + \mathbf{a}_y \cos \varphi = -\mathbf{a}_x \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \mathbf{a}_y \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

矢量场 \mathbf{A} 在直角坐标中的表达式为

$$\mathbf{A} = -\mathbf{a}_x \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-(x^2 + y^2)} + \mathbf{a}_y \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} e^{-(x^2 + y^2)}$$

代码如下。

```
%矢量场 A 的矢量图
theta=0:pi/5:2*pi;rho=0.4:0.4:2;          %φ∈[0,2π]，间隔为 π/5；ρ∈[0.4,2]，间隔为 0.4
[t,r]=meshgrid(theta,rho);                %在圆柱坐标下建立网格
U=- exp(-r.^2).* sin(t);                  %矢量场 A 的 x 分量
V= exp(-r.^2).*cos(t);                    %矢量场 A 的 y 分量
[x,y]=pol2cart(t,r);                      %将网格转化为直角坐标
quiver(x,y,U,V,2)                         %计算矢量场 A 的旋度
Xlim([-2 2]);                             %将显示范围限制在网格内
Ylim([-2 2]);
```

所画出的涡旋场的矢量图如图 1-39 所示。

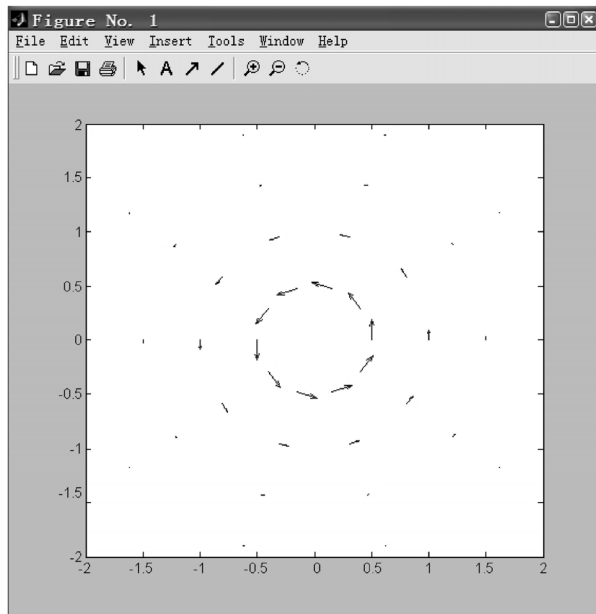


图 1-39 涡旋场的矢量图

%矢量场 \mathbf{A} 的旋度的矢量图

```
[x,y,z]=meshgrid(-2:2);
```

```
%建立[-2,2]区间间隔为 1 的网格
```

```
A=exp(-x.^2-y.^2);
U=-A.*y./sqrt((x+eps).^2+(y+eps).^2); %矢量场 A 的 x 分量
V=A.*x./sqrt((x+eps).^2+(y+eps).^2); %矢量场 A 的 y 分量
W=A.*0; %矢量场 A 的 z 分量
[curlx,curly,curlz]=curl(x,y,z,U,V,W); %计算矢量场 A 的旋度
quiver3(x,y,z,curlx,curly,curlz) %画旋度的三维矢量图
Xlim([-2 2]); %将显示范围限制在网格内
Ylim([-2 2]);
Zlim([-2,2]);
```

所画出的矢量场旋度图如图 1-40 所示。

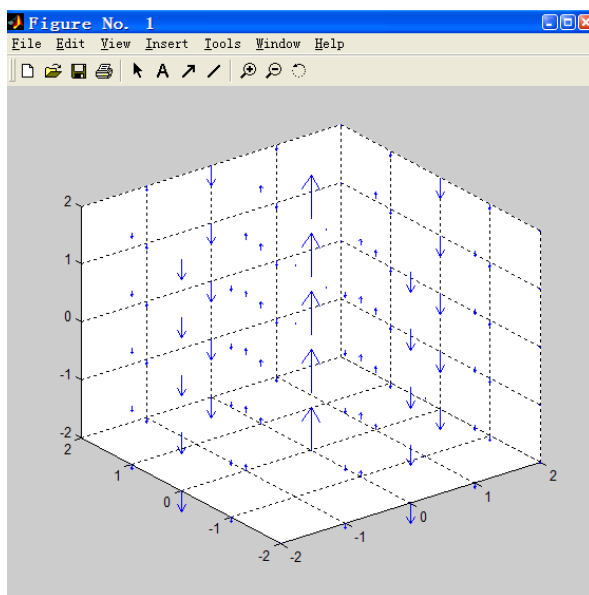


图 1-40 矢量场的旋度图

注意：代码中的 `eps` 时间计算中的最小数为 10^{-52} ，它是为了避免出现分母为零的情况而加的。

本节思考与练习

- 1.17 利用 MATLAB 求以矢量 $A = -a_x 2 - a_y 3 + a_z$ 、 $B = a_x 2 - a_y 5 + a_z 3$ 和 $C = a_x 4 - a_y 2 + a_z 6$ 为邻边构成的平行六面体的体积。
- 1.18 已知矢量 $A = a_x 2 + a_y 3 - a_z 4$ ； $B = -a_x 6 - a_y 4 + a_z$ ； $C = a_x - a_y + a_z$ 。试求① A 、 B 之间的夹角；② $A \times B$ 在 C 上的分量；并用 MATLAB 验证。
- 1.19 已知二维标量场 $f = y^2 - x$ 。利用 MATLAB (1) 在 xy 平面上画出 f 的等值线族；(2) 画出 ∇f 的矢量图。

本章小结

一、标量场和矢量场的概念

一个函数能在空间某区域中各点表征一个物理存在, 则称为一个场。标量场在区域中各点的物理特性用一个数来描述; 矢量场则对区域中各点的物理特性同时用大小和方向来描述。

二、矢量的标量积和矢量积

所有的矢量加法、乘法、微分运算都是对同一点进行的。

点积 (标量积):

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$$

直角坐标

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

圆柱坐标

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_\rho B_\rho + A_\varphi B_\varphi + A_z B_z$$

球坐标

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi$$

叉积 (矢量积):

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |AB \sin \theta| \mathbf{a}_n$$

直角坐标

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

圆柱坐标

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z \\ A_\rho & A_\varphi & A_z \\ B_\rho & B_\varphi & B_z \end{vmatrix}$$

球坐标

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_\varphi \\ A_r & A_\theta & A_\varphi \\ B_r & B_\theta & B_\varphi \end{vmatrix}$$

三、梯度、散度、旋度

标量场的梯度: $\nabla \Phi$

直角坐标

$$\nabla \Phi = \mathbf{a}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

圆柱坐标

$$\nabla \Phi = \mathbf{a}_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

球坐标

$$\nabla \Phi = \mathbf{a}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

矢量场的散度: $\nabla \cdot \mathbf{A}$

直角坐标

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{圆柱坐标} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\varphi}{\rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\rho \partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\text{球坐标} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

矢量场的旋度: $\nabla \times \mathbf{A}$

$$\text{直角坐标} \quad \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\text{圆柱坐标} \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho \mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\text{球坐标} \quad \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin \theta \mathbf{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

标量场的拉普拉斯微分: $\nabla^2 \Phi$

$$\text{直角坐标系} \quad \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\text{圆柱坐标系} \quad \nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\text{球坐标} \quad \nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

四、定理和矢量恒等式

$$\text{散度定理:} \quad \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau$$

$$\text{斯托克斯定理:} \quad \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{格林第一恒等式:} \quad \int_V \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi d\tau + \int_V \Phi \nabla^2 \Psi d\tau = \oint_S \Phi \nabla \Psi \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{格林定理:} \quad \int_V \Phi \nabla^2 \Psi d\tau - \int_V \Psi \nabla^2 \Phi d\tau = \oint_S (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{亥姆霍兹定理:} \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$$\text{式中,} \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

$$A(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

矢量斯托克斯定理: $\int_{\tau} (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = -\oint_S \mathbf{A} \times d\mathbf{S}$

含标量乘积的微分: $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f\nabla \times \mathbf{A} + \nabla f \times \mathbf{A}$$

含矢量积的微分: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

混合积: $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

二重矢量积: $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

习 题 一

- 1.1 已知矢量 $\mathbf{A} = a_x 2 - a_y 3 + a_z 4$; $\mathbf{B} = a_x 3 + a_y 2 + a_z$, 求矢量 $\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$ 的模、方向余弦及单位矢量。
- 1.2 已知三个矢量分别为 $\mathbf{A} = a_x + a_y 2 - a_z 3$; $\mathbf{B} = -a_y 4 + a_z$; $\mathbf{C} = a_x 5 - a_z 2$ 。试求
① $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$, $|\mathbf{C}|$; ② 单位矢量 a_A , a_B , a_C ; ③ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$; ④ $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$; ⑤ $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$
及 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$; ⑥ $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ 及 $(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{B}$ 。
- 1.3 证明 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ 。
- 1.4 证明 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C})^2$ 。
- 1.5 已知空间三角形的顶点在坐标为 $O(0, 0, 0)$, $P_1(1, 4, 3)$, $P_2(4, 2, -4)$ 。试问: ① 该三角形是否直角三角形? ② 计算该三角形的面积。
- 1.6 给定两矢量 $\mathbf{A} = a_x + 2a_y + 3a_z$ 和 $\mathbf{B} = 4a_x - 5a_y + 6a_z$, 求它们之间的夹角余弦和 \mathbf{A} 在 \mathbf{B} 上的分量(投影)。
- 1.7 已知矢量 $\mathbf{A} = a_x 2 + a_y 3 - a_z 4$; $\mathbf{B} = -a_x 6 - a_y 4 + a_z$; $\mathbf{C} = a_x - a_y + a_z$ 。试求① \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 之间的夹角; ② $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 在 \mathbf{C} 上的分量。
- 1.8 证明: 如果 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$ 且 $\mathbf{P} \times \mathbf{A} = \mathbf{P} \times \mathbf{B}$, 则矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。
- 1.9 用球坐标表示的矢量场为 $\mathbf{E} = a_r 25/r^2$ 。
① 求在点 $(-3, 4, -5)$ (直角坐标) 的 $|\mathbf{E}|$ 和 E_x ;
② 求 \mathbf{E} 与矢量 $\mathbf{B} = 2a_x - 2a_y + a_z$ 构成的夹角。
- 1.10 求以矢量 $\mathbf{A} = -a_x 2 - a_y 3 + a_z$ 、 $\mathbf{B} = a_x 2 - a_y 5 + a_z 3$ 和 $\mathbf{C} = a_x 4 - a_y 2 + a_z 6$ 为邻边构成的平行六面体的体积。
- 1.11 计算在圆柱坐标系中 $P(5, \pi/6, 5)$ 和 $Q(2, \pi/3, 4)$ 两点之间的距离。
- 1.12 求球坐标中 $P(10, \pi/4, \pi/3)$ 和 $Q(2, \pi/2, \pi)$ 两点之间的距离, 并求从 P 到 Q 的距离矢量。

1.13 求点 (6, 4, 4) 至连接点 (2, 1, 2) 与点 (3, -1, 4) 之直线的最短距离。

1.14 若 $\mathbf{F} = a_x x$, 沿下列三条路径分别计算 $\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$: (1) 在 xy 平面沿 x 轴从 $x=0$ 到 $x=1$; (2) 沿半径为 1 从 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\pi/2$ 的圆弧; (3) 沿 y 轴从 $y=1$ 到 $y=0$ 。

1.15 若 $\mathbf{A} = a_x z + a_y x - a_z 3y^2 z$, 求通量 $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 。其中 S 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 16$ 在第一象限中与 $x=0$ 、 $y=0$ 及 $z=0$ 和 $z=5$ 平面所围成的闭合面。

1.16 球心在原点半径为 a 的球内充满体密度为 $\rho_f = kr^2$ (k 为常数) 的电荷。求半径为 $a/2$ 的球面所包围的电荷量和总电量。

1.17 根据算符 ∇ 的矢量特性, 推导下列公式

$$(1) \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B};$$

$$(2) \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}。$$

1.18 设 u 是空间坐标 x, y, z 的函数, 证明

$$(1) \nabla \cdot \mathbf{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{d\mathbf{A}}{du};$$

$$(2) \nabla \times \mathbf{A}(u) = \nabla u \times \frac{d\mathbf{A}}{du}。$$

1.19 证明在圆柱坐标系

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho^2} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

1.20 求双曲线族 $f = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 任意点的单位法向矢量。

1.21 求 $f = 3x^2 z - xy + z^2$ 在 (1, -1, 1) 点沿曲线 C 的 x 增加一方的方向导数。已知 C 的曲线方程为

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$$

1.22 已知二维标量场 $f = y^2 - x$ 。(1) 问 f 的等值面是何种曲面? 并在 xy 平面上画出 f 的等值线族; (2) 求 ∇f ; (3) 任取一个回路 C , 计算 $\oint_C \nabla f \cdot d\mathbf{l}$ 。

1.23 试求 $\oint_S \mathbf{a}_r 3 \sin \theta \cdot d\mathbf{S}$, 式中 S 为球心位于原点, 半径为 5 的球面。

1.24 若矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_r \frac{\cos^2 \varphi}{r^3}$, $1 < r < 2$, 试求 $\int_\tau \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau$, 式中 τ 为 \mathbf{A} 所在区域。

1.25 应用斯托克斯定理证明 $\int_S \nabla \Psi \times d\mathbf{S} = -\oint_C \Psi d\mathbf{l}$ 。

1.26 (1) 应用斯托克斯定理证明, 对于 z 平面上的简单闭合曲线所包围的面积为

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

(2) 求椭圆 $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ 的面积。

1.27 在由坐标面 $\rho = 5$, $z = 0$, $z = 2$ 围成的圆柱形区域中, 对矢量 $\mathbf{A} = \mathbf{a}_\rho \rho^2 + \mathbf{a}_z 2z$ 验证散度定理。

1.28 在矢量场 $\mathbf{A} = -\mathbf{a}_x y + \mathbf{a}_y x$ 中有一矩形回路 $C: (0, 0) \rightarrow (3, 0) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (0, 4) \rightarrow (0, 0)$ 。对回路 C 及其围成的矩形面积 S 验证斯托克斯定理。

1.29 有三个矢量场:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\rho z^2 \sin \varphi + \mathbf{a}_\varphi z^2 \cos \varphi + \mathbf{a}_z 2\rho z \sin \varphi$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{a}_x (3y^2 - 2x) + \mathbf{a}_y x^2 + \mathbf{a}_z 2z$$

(1) 其中哪些场可以表示为一个标量场的梯度场? 哪些场可以表示为一个矢量场的旋度场?

(2) 求出这些矢量场的源分布。

1.30 已知无限大空间矢量场 $\nabla \cdot \mathbf{F} = q\delta(\mathbf{r})$, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, 试求该矢量场。

第2章

静 电 场

静电场是由相对于观察者来说静止分布的电荷产生的物理场，其最基本的特征是对场内的电荷有力的作用。本章我们将在物理学相关知识的基础上，导出真空中静电场的基本方程，证实静电场是保守场，并利用此特性引出既有物理意义又可简化电场计算的标量电位及其满足的电位方程；考虑到媒质对静电场的影响，导出介质中静电场的基本方程，及介质分界面上的边界条件；在静电场的计算方法上，除了利用库仑定律的直接积分法外，特别介绍了利用高斯定律、泊松方程、拉普拉斯方程求解一维场，以及应用分离变量法和镜像法来求解二维场的问题。最后，介绍电容的概念及静电场的能量和静电力。本章所涉及的内容，从思维方法上对后面各章的电磁场分析具有典型的指导意义，在学习中应细心体会，充分总结。

➔ 2.1 库仑定律

本节简要回顾与静电场相关的基础物理知识，为从场论的角度系统分析静电场作储备。

2.1.1 电荷

电荷有正、负两种，同种电荷相斥，异种电荷相吸。电荷具有量子性，电子所带的电量是电荷的基本单元， $e=1.602\times 10^{-19}\text{C}$ ，但从宏观的电磁规律考虑，可认为电荷连续分布在一定的区域中，其体密度用 $\rho(\text{C}/\text{m}^3)$ 表示，若体积 $\Delta\tau$ 内的电荷量为 Δq ，则

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau} \quad (2.1.1)$$

当电荷所在区域的几何尺寸比所研究的问题中所涉及的距离小很多时，该区域可看做一个点，点电荷 q 的体密度可用 δ 函数表示为

$$\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

其中， \mathbf{r}' 为点电荷的位置矢量。当电荷分布在厚度可忽略的薄层内时，可定义面电荷密度 $\rho_s(\text{C}/\text{m}^2)$ 为

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (2.1.2)$$

当直径可忽略时,可定义线电荷密度 $\rho_l(\text{C/m})$ 为

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} \quad (2.1.3)$$

点、线、面电荷分布都属于奇异电荷分布。电荷具有守恒的性质,即对于一个系统,如果没有净电荷出入其边界,则该系统的正、负电荷量的代数和保持不变,称为电荷守恒定律。电荷还具有相对不变性,即在不同的参考系内观察,同一带电粒子的电量不变。

2.1.2 电场强度

电场最基本的特征是对电荷有作用力,无论电荷是运动的还是静止的;而电场强度则是描述电场的最基本的物理量。一个电场的电场强度定义为单位电量的点电荷所受到的该电场的作用力(即不包括受力电荷本身产生的电场):

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (2.1.4)$$

其中, \mathbf{F} 的单位为 N (牛); q 的单位为 C (库); \mathbf{E} 的单位为 V/m (伏/米),实际应用也用 kV/cm (千伏/厘米) 等单位。

式(2.1.4)的电场强度定义是普适的。式中的 \mathbf{E} 泛指各种电场力,即不仅限于指静电力或库仑力,也指其他原因产生的电场力。而受力电荷 q 可以是静止的,也可以是运动的(相对论的研究还表明,电场对电荷 q 的作用力与电荷 q 的运动速度无关)。

2.1.3 库仑定律与叠加原理

1785 年法国科学家库仑通过实验总结出真空中两个点电荷之间的作用力的规律,称为库仑定律,用矢量公式表示为

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{R_{12}} = \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (2.1.5)$$

式中, \mathbf{F}_{12} 是 q_1 对 q_2 的作用力,单位为牛顿(N);而

$$\epsilon_0 = 8.854\,187\,817 \cdots \times 10^{-12} \approx 10^{-9}/36\pi \text{ (F/m)}$$

是真空中介电常数,又称为电容率;而

$$R_{12} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$

是点电荷 q_1 和 q_2 之间的距离,单位为米(m); \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 分别是 q_1 和 q_2 的位置矢量;而

$$\mathbf{a}_{R_{12}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

是由 q_1 指向 q_2 的单位矢量,如图 2-1 所示。

由式(2.1.1)可看出, q_1 对 q_2 的作用力与 q_2 对 q_1 的作用力大小相等,方向相反,满足牛顿第三定律,即

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (2.1.6)$$

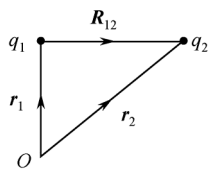


图 2-1 两点电荷之间的电场力

实验证明, 库仑力服从叠加定理, 也就是说, N 个点电荷作用在一个电荷 q_0 上的合力是每个点电荷分别作用在 q_0 上的电场力的矢量和, 即

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N q_0 \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2.1.7)$$

式中, \mathbf{r} 和 \mathbf{r}_i 分别是点电荷 q_0 和 q_i 的位置矢量。

式 (2.1.4) 表明, 电场中任意点的电场强度等于静止于该点的单位点电荷所受到的静电力。于是, 式 (2.1.5) 的库仑力可解释为电荷 q_2 在 q_1 的电场中所受到的静电力。一般地, 电荷 q 所产生的电场强度即可表示为

$$\mathbf{E} = \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.1.8)$$

将式 (2.1.7) 代入到式 (2.1.8) 中, 可得到 N 个点电荷的系统的电场强度为

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{R_i} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i \quad (2.1.9)$$

式中, R_i 是点电荷 q_i 到场点的距离, \mathbf{a}_{R_i} 是由源点 q_i 指向场点的单位矢量。

从上式可以看出, 场强满足叠加原理。由此, 对连续分布的电荷, 可认为是由许多无限小的电荷元 dq 组成的, 而每个电荷元都可以当做点电荷处理。设其中一个电荷元 dq 在场点 P 产生的场强为 $d\mathbf{E}$, 则按照式 (2.1.9), 应有

$$d\mathbf{E} = \mathbf{a}_R \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (2.1.10)$$

式中, R 是电荷元 dq 到场点 P 的距离, \mathbf{a}_R 是由源点 dq 指向场点 P 的单位矢量。整个分布电荷在场点 P 所产生的总场强为

$$\text{体电荷分布} \quad \mathbf{E} = \int_V \mathbf{a}_R \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 R^2} d\tau' \quad (2.1.11)$$

$$\text{面电荷分布} \quad \mathbf{E} = \int_S \mathbf{a}_R \frac{\rho_s(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS' \quad (2.1.12)$$

$$\text{线电荷分布} \quad \mathbf{E} = \int_l \mathbf{a}_R \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 R^2} dl' \quad (2.1.13)$$

例 2.1 一个半径为 a 的孤立导体球, 总电量为 Q 。求球内外的电场强度。

解 当静电平衡时, 孤立导体球的电荷均匀分布于导体表面, 密度为 $\rho_s = Q/4\pi a^2$, 如图 2-2 建立球坐标系, 依式 (2.1.11), 球外距球心 r 处的场点 P 的场强为

$$\mathbf{E} = \int_S \mathbf{a}_R \frac{\rho_s(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS' = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{a}_R \frac{Q/4\pi a^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} a^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$$

将 \mathbf{a}_R 方向在圆柱坐标中分解, 得

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{16\pi^2 \epsilon_0 R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{a}_z \cos\theta' - \mathbf{a}_\rho \sin\theta') \sin\theta' d\theta' d\phi' \quad (2.1.14)$$

式中

$$\int_0^{2\pi} a_\rho d\varphi' = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2rR}$$

$$\cos \theta' = \frac{a^2 + r^2 - R^2}{2ar}$$

$$\sin \theta' d\theta' = -d(\cos \theta') = \frac{R}{ar} dR$$

代入式(2.1.13)中,并考虑到场点的球对称性,将 a_R 换为 a_r ,得

$$r \geq a, \quad E = a_r \frac{Q}{16\pi^2 \varepsilon_0} 2\pi \int_{r-a}^{r+a} \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2rR} \frac{1}{R^2} \frac{R}{ar} dR$$

$$= a_r \frac{Q}{16\pi \varepsilon_0 ar^2} \left(R - \frac{r^2 - a^2}{R} \right) \Big|_{r-a}^{r+a} = a_r \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

$r < a$, 把上面的面积分中的下限变为 $a-r$ 即可, 有

$$E = a_r \frac{Q}{16\pi \varepsilon_0 ar^2} \left(R - \frac{r^2 - a^2}{R} \right) \Big|_{a-r}^{a+r} = 0$$

可见, 导体球内部没有电场, 球外的电场相当于点电荷 Q 位于球心的电场。

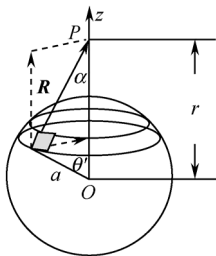


图 2-2 例 2.1 图

本节思考与练习

- 2.1 在例 2.1 中假设在某个时刻电量 Q 均匀分布在导体球中, 会发生什么现象?
- 2.2 两个带电量分别为 1 mC 和 $6 \mu\text{C}$ 的点电荷分别位于点 $(1, 2, 3)$ 和 $(6, 8, 10)$, 求 $6 \mu\text{C}$ 点电荷所受到的作用力。
- 2.3 半径为 a 的圆环均匀分布电荷 ρ_l , 求轴线上距环心 a 处一点电荷 q 所受到的作用力。
- 2.4 线密度为 ρ_l 的带电直线长度为 l , 求该直线垂直平分线上任意一点的电场强度。

2.2 真空中静电场的基本方程

这一节我们将从点电荷的电场出发, 导出静电场的通量和环量公式, 从而得到真空中静电场的基本方程。为此, 先介绍立体角的概念。

2.2.1 立体角

半径为 R 的球面上任意形状的一个面对球心可构成一个锥体, 这个锥体的空间角度可用立体角来度量, 定义为

$$d\Omega = \frac{dS_r}{R^2}$$

其单位为球面度 (sr), 如图 2-3 (a) 所示。从图中可见, 非球面面元 dS 对空间一点 P 所张的立体角可将 dS 投影到球面上, 并按照球面面元的立体角公式来计算

$$d\Omega = \frac{dS_r}{R^2} = \frac{\mathbf{a}_r \cdot d\mathbf{S}}{R^2} \quad (2.2.1)$$

式中, R 是 P 点到面元 dS 的距离, \mathbf{a}_r 是由 P 点指向面元 dS 的单位矢量。从式中可看出立体角有正负之分。

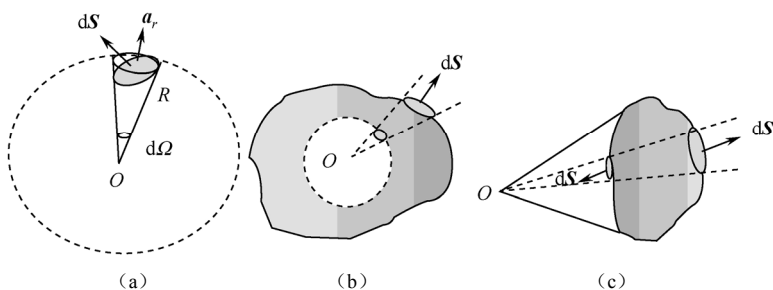


图 2-3 立体角

以下是几种有用的立体角:

(1) 半锥角为 θ 的圆锥在球面上割出的球冠面积对球心所张的立体角为 $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$ 。

此结论可由例 1.5 的结论 $\int_S \frac{\mathbf{a}_r}{r^2} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{1}{r^2} dS_r = 2\pi(1 - \cos\theta)$ 得出。

(2) 任意曲面对其面内上侧一点所张的立体角为 $\Omega = -2\pi$; 对其面内下侧一点所张的立体角为 $\Omega = 2\pi$ 。

利用例 1.5 的结论, 并注意到当 $\theta = \pi/2$ 时, 球冠对球心所张的立体角的圆锥侧面即变为平面, 而锥面内的任意曲面对顶点所张的立体角均相等。于是当点在曲面下侧时, 有

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2\pi$$

当点在曲面上侧时, 由点指向曲面的方向与曲面的正方向相反, 因此

$$\Omega = -2\pi(1 - \cos\theta)\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -2\pi$$

(3) 任意闭合面对面内一点所张的立体角为 $\Omega = 4\pi$, 对面外一点所张的立体角为 $\Omega = 0$ 。如图 2-3 (b) 和 (c) 所示。

2.2.2 静电场的通量和散度

在一个点电荷 q 的静电场 $\mathbf{E} = \mathbf{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ 中任取一个闭合面 S , 计算 \mathbf{E} 穿出闭合面的通量为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{a}_R \cdot d\mathbf{S}}{R^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega$$

当点电荷在闭合面内时, 闭合面对点电荷所张的立体角是 4π , 当点电荷在闭合面外时, 闭合面对点电荷所张的立体角为零, 由此可得静电场的通量方程为

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} \frac{q}{\epsilon_0} & q \text{ 在 } S \text{ 面内} \\ 0 & q \text{ 在 } S \text{ 面外} \end{cases}$$

推广到多个点电荷的系统, 则有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\sum_i \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0} \quad (2.2.2)$$

该式称为真空中**高斯定律**的积分形式, 曲面 S 称为**高斯面**。高斯定律表明, 真空中静电场的电场强度穿出任一闭合面的通量等于该闭合面所包围的总电量与真空电容率的比值。

当闭合面内充满连续分布的体电荷 ρ 时, 则有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\int_V \rho d\tau}{\epsilon_0} \quad (2.2.3)$$

应用散度定理, 有

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$$

上式对体电荷分布区域中任意 τ 都成立, 因此有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.2.4)$$

该式称为真空中高斯定律的微分形式。它表明, 真空中静电场的电场强度在某点的散度等于该点的电荷体密度与真空电容率的比值。作为 \mathbf{E} 的体积导数, $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 仍然是一个分布函数。 $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 的分布就代表场源电荷的分布, 式 (2.2.4) 比式 (2.2.2) 更为具体地给

出了每一点处的电荷密度。注意：作为 \mathbf{E} 的空间导数， $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 只存在与 \mathbf{E} 连续分布的体积中；在 \mathbf{E} 发生突变的边界面上， $\nabla \cdot \mathbf{E}$ 没有意义。

从高斯定律可以看出，静电场的散度源就是电荷。正电荷相当于流速场中的“喷泉”，发出电力线，而负电荷相当于“漏口”，吸收电力线。只要没有电荷的空间就恒有 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ，表明在没有电荷的空间电力线不可能相互或中断，因而也被称为“电力管”。

静电场的基本方程之一就是高斯定律。但它仅反映了静电场特征的一个侧面。根据亥姆霍兹定理，还应该考察静电场特征的另一个侧面，即有无涡旋源。

2.2.3 静电场的环量和旋度

在一个点电荷 q 的静电场中任取一个闭合路径 C ，计算 \mathbf{E} 沿 C 的环量为

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{a}_R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_C \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_C d\left(\frac{1}{R} \right) = 0 \quad (2.2.5)$$

该式表明，真空中静电场电场强度的线积分仅与路径的起止点有关，而与积分路径无关，因而静电场是保守场。

对式 (2.2.5) 应用斯托克斯定理，有

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

上式对任意环路围成的曲面 S 均成立，因而有

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.2.6)$$

该式表明，真空中静电场的电场强度的旋度处处为零。

从上述推导中，可将真空中静电场的基本方程总结如下。

积分形式：

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sum q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

微分形式：

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

从中我们可以得出以下结论。

(1) 静电场是有散无旋场；电荷是产生静电场的散度源，真空中任意一点的电场强度由整个空间的全部电荷共同产生；电力线（电场强度矢量线）从正电荷发出，负电荷终止，在没有电荷的空间不能交叉或中断；静电场中不存在涡旋源，没有涡旋现象，电场矢量线永远不会闭合。

(2) 高斯定律积分形式方程右边的电荷量是闭合面所包围的净电量，它仅决定电场强度穿出闭合面的电通量。但当电荷分布具有某种特殊对称形式时，电场分布可以是具有特殊对称性的一维场，这时基本方程组里的环量（旋度）方程得到自然满足，仅由高斯定律的积分形式即可求出电场分布。

(3) 高斯定律的微分形式给出了任意一点的电场强度和该点电荷体密度之间的关系，但散度运算要求矢量函数——电场强度在求导点连续，因此，利用此方程求解电荷

分布时, 仅能求出体电荷分布。对场量不连续的点可能存在的奇异电荷分布, 需应用高斯定律的积分形式来求解。

例 2.2 真空中半径为 a 的球形区域中分布有体电荷 $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$, 其中 ρ_0 为常数。求空间各点的电场强度。

解 因为电荷分布具有球对称形, 所以电场分布也具有球对称形, 它是半径的函数, 且方向沿径向, 故宜采用高斯定律的积分形式来求解。

(1) 当 $r \leq a$, 取过该点的同心球面为高斯面, 在此球面上, 电场强度的大小处处相等, 方向与球面垂直。应用高斯定律, 有

$$\oint_S \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right) 4\pi r'^2 dr'$$

$$4\pi r^2 E_{1r}(\mathbf{r}) = \frac{4\pi \rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right)$$

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_r \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2}\right)$$

(2) 当 $r \geq a$, 取过该点的同心球面为高斯面, 应用高斯定律, 有

$$\oint_S \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^a \rho_0 \left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right) 4\pi r'^2 dr'$$

$$4\pi r^2 E_{2r}(\mathbf{r}) = \frac{8\pi \rho_0 a^3}{15\varepsilon_0}$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_r \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^2}$$

为了书写简单, 在后续的计算中, 在不至于混淆的情况下, 高斯定律右边关于源的积分变量也可以不加撇 (')。

本节思考与练习

2.5 若 $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$, 能否得出 $\mathbf{E} = 0$ 的结论? 什么条件下能有此结论?

2.6 无限大带电平面, 面电荷密度为 ρ_s , 求平面两侧的电场强度。

2.7 两个无限大平面相距为 d , 分别带均匀分布的面电荷 ρ_s 和 $-\rho_s$, 求空间各部分区域的电场强度。

2.8 无限长带电直线, 电荷线密度为 ρ_l , 求电场强度。

2.3 电位

2.3.1 电位的引入及电位的物理意义

静电场是无旋场, 根据矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \Phi(\mathbf{r}) = 0$, 可令

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) \quad (2.3.1)$$

我们称标量函数 Φ 为**电位**, 式 (2.3.1) 为电场强度和电位之间的微分关系式。可见, 静电场是电位的负梯度, 指向电位降低的方向, 电场矢量线与等电位线 (面) 相垂直。

按照梯度与方向导数的关系, \mathbf{E} 在任意方向 \mathbf{l} 上的分量为

$$E_l = -\nabla \Phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{a}_l = -\frac{\partial \Phi}{\partial l} \quad (2.3.2)$$

空间任意两点 P 、 Q 之间的电位差

$$U_{PQ} = \Phi_P - \Phi_Q = \int_Q^P d\Phi = -\int_Q^P \nabla \Phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.3.3)$$

特别地, 若取 Q 点为零电位参考点, 则 P 点相对于 Q 点的电位差也就是 P 点的电位:

$$\Phi_P = \int_P^{\text{参考点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.3.4)$$

上式称为电场强度与电位之间的积分关系式。从式中可看出电位的物理意义: **某点的电位表示把单位点电荷从该点移到参考点的过程中电场力所做的功。**

2.3.2 电位的计算方法

把点电荷 q 的电场强度代入式 (2.3.4), 可得

$$\Phi_P = \int_P^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{a}_R \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} dR = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_P} - \frac{1}{R_Q} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_P} + C$$

一般地, 对孤立点电荷, 可取无穷远 ($R_Q \rightarrow \infty$) 处作为零参考电位点, 此时, $C = 0$, 于是点电荷 q 产生的电位可写为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (2.3.5)$$

类似地, 可得到其他分布电荷的电位, 即

$$N \text{ 个点电荷: } \Phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_i} \quad (R_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|) \quad (2.3.6)$$

$$\text{体电荷: } \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} d\tau' + C \quad (2.3.7)$$

$$\text{面电荷: } \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s(\mathbf{r}')}{R} dS' + C \quad (2.3.8)$$

线电荷:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{R} d\mathbf{l}' + C \quad (2.3.9)$$

比较电位的计算式和电场强度的计算式可以看出,由电荷分布直接积分求电场强度是矢量积分,而求电位是标量积分;求出电位后再取其负梯度计算电场强度是求导运算,而求导要比积分容易。因此,引入电位可以简化电场的求解。

在实际计算中,对零参考电位点的选取,依不同的物理系统,按照实际应用来确定。

例 2.3 同轴电缆由内外半径分别为 a 和 b 导体圆柱构成,设其无限长,内外导体之间为空气,并加电压 U ,如图 2-4 所示。求同轴电缆内外导体之间的电场强度和单位长度的电容 C 。

解 静电平衡时电荷均匀分布在内外导体表面(带正电)及外导体内表面(带负电),外导体的外表面接地,不带电。因此,电场在内外导体之间沿径向分布,具有轴对称性。设内外导体单位长度的带电量分别为 ρ_l 及 $-\rho_l$,以场点到轴线的距离 ρ 为半径作一圆柱形高斯面,应用高斯定律,可得

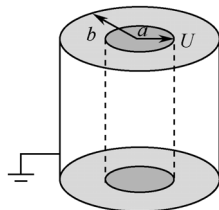


图 2-4 同轴电缆

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E_\rho 2\pi\rho = \frac{\rho_l}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = a_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \quad (2.3.10)$$

两圆柱间的电压为

$$U = \int_a^b \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} d\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

故

$$\rho_l = \frac{2\pi\epsilon_0 U}{\ln \frac{b}{a}} \quad (2.3.11)$$

$$E_\rho = \frac{U}{\rho \ln \frac{b}{a}} \quad (2.3.12)$$

单位长度的电容

$$C = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \quad (2.3.13)$$

例 2.4 平行双线传输线可看做两根单位带电量分别是 ρ_l 和 $-\rho_l$ 的无限长细圆柱或直线,试求其电位分布。

解 单根直线电荷的电场同式 (2.3.10), 为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = a_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho}$$

由于线电荷无限长，零参考电位点不能取在无穷远点，一般可任意指定某一位置 ρ_0 为零参考点，因此，单根线电荷的电位场为

$$\Phi(\rho) = \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} d\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho} \quad (2.3.14)$$

平行双线的电位场是两根单线的场的叠加

$$\Phi = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_2} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (2.3.15)$$

其中， ρ_1 、 ρ_2 分别是场点到带正电直线和带负电直线的垂直距离，显然， $\rho_1 = \rho_2$ 时， $\Phi = 0$ ，因此，零参考电位点即取在 $\rho_1 = \rho_2$ 的平面上，其场分布如图 2-5 所示。

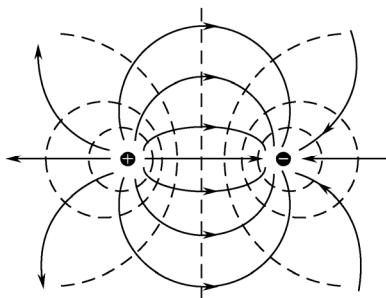


图 2-5 平行双线传输线的场分布

本节思考与练习

- 2.9 若例题 2.2 中，在球形区域外部放置一个同心的金属球壳，设半径为 $b(b > a)$ ，那么当球壳接地（称为屏蔽）或不接地时，球内外各部分区域的电场强度和电位有何变化？
- 2.10 两个半径分别为 r_1 和 r_2 的导体球分别带电 q_1 和 q_2 ，两球心相距为 d ($d > r_1$, $d > r_2$)，求两球之间的电位差。
- 2.11 半径为 a 的圆环均匀分布电荷 ρ_l ，求轴线上任意一点的电位和电场强度。

➔ 2.4 介质中的高斯定律

本节将讨论有物质存在时静电场的基本方程。通常，我们所说的物质也称为媒质，按照导电性能的大小可分为三大类：理想导体 ($\sigma \rightarrow \infty$)、导电媒质 ($0 < \sigma < \infty$) 和理想介质 ($\sigma = 0$)，其中导电媒质一般又可分为良导体、半导体和良介质。本节中我们所说的介质是指理想介质，也是平常所说的绝缘体。

2.4.1 电偶极子

一对等值异号的点电荷,相距一个相对小的距离 $l(l \ll r)$,就构成一个电偶极子。电偶极子是一种重要的电荷系统,在分析电介质的极化和天线的辐射场等场合中,都要利用这一模型。

电偶极子的电矩(简称为电偶极矩)定义为

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}$$

其中, \mathbf{l} 由 $-q$ 指向 $+q$, 单位为 $\text{C} \cdot \text{m}$ 。

图 2-6 表示一个电偶极子,由于我们关心的是远处的场,即 $r \gg l$ 的情形,此时偶极子已近乎一个点,故可采用球坐标,把原点置于偶极子中心, z 轴与 \mathbf{l} 相重合。

远场点 $P(r, \theta, \varphi)$ 的电位等于两个点电荷单独产生的电位的叠加,即

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

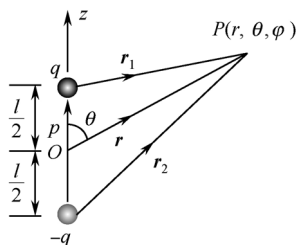


图 2-6 电偶极子

根据余弦定理

$$r_1^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - rl \cos \theta$$

$$r_2^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + rl \cos \theta$$

由于 $r \gg l$, 用泰勒级数展开并略去高阶项, 可得

$$\frac{1}{r_1} \approx \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \frac{l}{2} \cos \theta \quad \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{l}{2} \cos \theta$$

从而

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{ql \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.4.1)$$

也可写成

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \nabla \frac{1}{r} \quad (2.4.2)$$

由此得到电偶极子的电场强度分布为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi = \mathbf{a}_r \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \mathbf{a}_\theta \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (2.4.3)$$

从计算结果及图 2-7 所示的场分布图可以看出, 较之孤立点电荷的电场, 电偶极子的电场具有远场衰减更快和轴对称的特点。

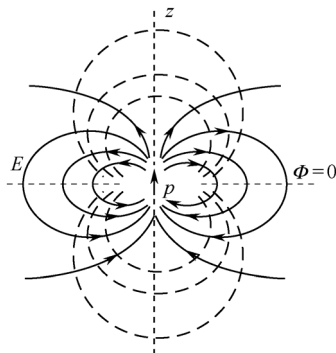


图 2-7 电偶极子的场分布

例 2.5 导出球坐标下电偶极子的等位线和电力线方程。

解 先看等位线方程。由式 (2.4.1) 可得到

$$r = \sqrt{\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 \Phi}} = C \sqrt{\cos \theta} \left(C = \sqrt{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 \Phi}} \right) \quad (2.4.4a)$$

取 C 为一系列不同的常数 (相应于 Φ 取一系列电位值), 就可以画出一族 r 对 θ 的曲线 (等位线)。

下面推导电力线方程。某点电场强度的方向就是该点电力线的切线方向, 而切线方向可以看做矢线上该点处的线元 $d\mathbf{l}$ 的极限方向, 从而有 $d\mathbf{l} = k\mathbf{E}$ 。因此, 也应有 $\mathbf{E} \times d\mathbf{l} = 0$ 。两者都是电力线的矢量形式的微分方程。比较简单的办法是把前者在球坐标系中展开, 即

$$\mathbf{a}_r dr + \mathbf{a}_\theta r d\theta + \mathbf{a}_\phi r \sin \theta d\phi = k(\mathbf{a}_r E_r + \mathbf{a}_\theta E_\theta + \mathbf{a}_\phi E_\phi)$$

两个矢量相等时每个对应分量都相等, 从而得到两个等式

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{r \sin \theta d\phi}{E_\phi}$$

考虑到电偶极子的场没有 E_ϕ 分量, 并利用式 (2.4.3), 就可得到

$$\begin{aligned} \frac{dr}{2 \cos \theta} &= \frac{r d\theta}{\sin \theta} \\ \frac{dr}{r} &= \frac{2 d(\sin \theta)}{\sin \theta} \end{aligned}$$

积分得

$$\begin{aligned} \ln r &= 2 \ln(\sin \theta) + \ln C' \\ r &= C' \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (2.4.4b)$$

式 (2.4.4b) 就是所求的电力线方程。取一系列的 C' 值, 就可得到 r 对 θ 的一族电力线。

推广到分布电荷的情形,则总的电矩为每个点电荷或单元电荷对原点的电矩的矢量合成(迭加或积分)。

例 2.6 一个半径为 a 的带电球壳如图 2-8 所示,其电荷面密度为 $\rho_s = \rho_0 \cos \theta$ (θ 是极角), 计算它的偶极矩。

解 把每个球面元 $\rho_s dS$ 看成一个点电荷,则该点电荷的电矩为 $d\mathbf{p} = \rho_s d\mathbf{S}r$ 。积分时应把它分解为直角坐标分量,然后对各分量分别积分

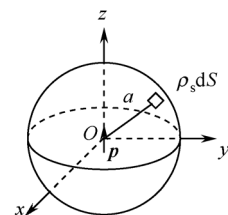


图 2-8 带电球壳的电矩

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{p} &= \rho_s d\mathbf{S}r = \rho_0 \cos \theta (\mathbf{a}_x a \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_y a \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{a}_z a \cos \theta) a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\
 \mathbf{p} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{a}_x a \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_y a \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{a}_z a \cos \theta) a^2 \rho_0 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= \rho_0 a^3 \mathbf{a}_z \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi \\
 &= -\mathbf{a}_z 2\pi \rho_0 a^3 \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi = \mathbf{a}_z \frac{4\pi a^3}{3} \rho_0
 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

它恰好相当于一个位于球心的电偶极子。利用式 (2.4.2), 它在球外一点的电位应为

$$\Phi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \tag{2.4.6}$$

2.4.2 介质的极化

在介质的微观结构中,电子被原子核紧紧地束缚在周围,不能做超越原子尺寸的自由移动,因此不具导电性。但在外加电场的作用下,原子或分子的电结构会有微弱的变形,使正、负电荷的中心不再重合,从而出现大量偶极子的有序集合体,这种现象称为介质的极化现象,如图 2-9 所示。由此形成的宏观分布电荷因其不能脱离分子或原子对它们的束缚而称为极化电荷或束缚电荷。

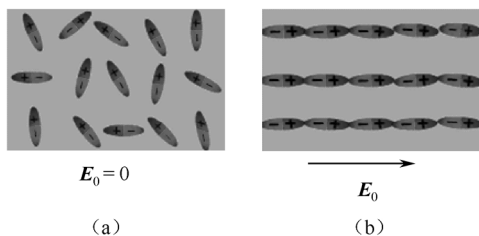


图 2-9 介质的极化

被外电场 \mathbf{E}_0 极化的介质,虽然总束缚电量为零,但微观电荷的重新分布将产生一个附加电场 \mathbf{E}_p ,从而影响宏观电场分布。下面将利用电偶极子的电位场来推算介质表面和介质中的束缚电荷分布。为此,定义单位体积中的偶极矩矢量和为**极化强度**,用来表征和度量介质被极化的程度,其定义式为

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta\tau} \quad (\text{C/m}^2) \tag{2.4.7}$$

式中, $\Delta \mathbf{p}$ 是体积 $\Delta \tau$ 内的偶极矩。利用单个电偶极子产生的电位式 (2.4.2), 图 2-10 所示的被极化的电介质 τ 中体积元 $d\tau'$ 内的偶极子 $d\mathbf{p} = \mathbf{P}d\tau'$ 在场点 \mathbf{r} 处产生的电位为

$$d\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{a}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} d\tau' \quad (2.4.8)$$

式中, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $\mathbf{a}_R = \frac{\mathbf{R}}{R}$ 。

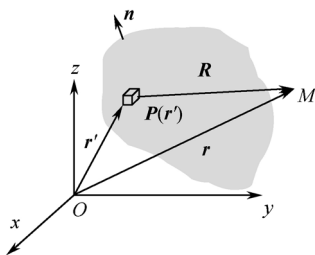


图 2-10 极化介质的电位

利用 $\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = -\mathbf{a}_R \frac{1}{R^2}$, 式 (2.4.8) 可写为

$$d\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) d\tau'$$

利用矢量恒等式 (1.4.8) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$, 有

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} \right) - \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')$$

则整个极化介质在场点所产生的电位可写为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{\tau'} \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} \right) d\tau' - \int_{\tau'} \frac{1}{R} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') d\tau' \right]$$

对等式右边第一项应用散度定理得

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S'} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{R} dS' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} d\tau' \quad (2.4.9)$$

对比由分布电荷直接积分计算电位的式 (2.3.7) 和式 (2.3.8), 可以看出式 (2.4.9) 中的 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ 和 $-\nabla' \cdot \mathbf{P}$ 即表示介质被极化后介质表面所出现的束缚面电荷密度和介质内的束缚体电荷密度, 记为

$$\text{束缚面电荷密度} \quad \rho_{ps}(\mathbf{r}') = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}|_S \quad \text{或} \quad \rho_{ps}(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}|_S \quad (2.4.10)$$

$$\text{束缚体电荷密度} \quad \rho_p(\mathbf{r}') = -\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \quad \text{或} \quad \rho_p(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) \quad (2.4.11)$$

束缚电荷与自由电荷不同的是, 它是由介质中原来平衡的正负电荷对相对分离而导致的重新分布, 其总电量依然为零, 即

$$Q_p + Q_{ps} = 0$$

2.4.3 介质中的高斯定律

束缚电荷与自由电荷相同的是，它们都是产生电场的源。因此，在介质中若同时存在这两种电荷，则高斯定律的微分形式应为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\varepsilon_0} \quad (2.4.12a)$$

式中， \mathbf{E} 是介质中的合成电场，脚标 f 指明是自由电荷，一般情况下也可不加。将式 (2.4.11) 代入上式，可得

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \quad (2.4.12b)$$

若定义矢量

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (\text{C/m}^2) \quad (2.4.13)$$

为介质中的电通密度或称电位移，则介质中的高斯定律可写为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (2.4.14)$$

利用散度定理，可得出其积分形式

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (2.4.15)$$

由于矢量 \mathbf{D} 包含了介质极化对电场强度的影响，因此，计算上只需考虑自由电荷的作用，从而避免了束缚电荷的计算，使方程变得更加简洁。

2.4.4 本构关系

一般来说，不同的介质，其极化强度 \mathbf{P} 和电场强度 \mathbf{E} 的关系是不同的。若其模值成正比关系，就称这种介质是线性的；若 \mathbf{P} 的方向总能与 \mathbf{E} 的方向平行（而不是像某些晶体一样会沿着固有的结晶轴极化），就称这种介质是各向同性的；若介质各部分性质相同，则称这种介质是均匀的。线性的、各向同性的、均匀的介质也称为简单介质。实验表明，简单介质中的极化强度 \mathbf{P} 和介质中的合成电场 \mathbf{E} 之间的关系可表示为

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (2.4.16)$$

式中， χ_e 称为电极化率，无量纲。对简单介质， χ_e 是常数。把上式代入式 (2.4.13)，可得到介质的本构关系为

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_e) \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.4.17)$$

式中，

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (2.4.18)$$

称做介质的相对电容率或相对介电常数，无量纲； ε 称做介质的电容率或介电常数，单位为 F/m。对简单介质，它们都是常数。一些常见材料的相对电容率列于表 2-1 中。

表 2-1 常见材料的相对电容率

材 料	ϵ_r	材 料	ϵ_r	材 料	ϵ_r
空气	1.0	尼龙	3.5	橡胶	2.3~4.0
蒸馏水	80	有机玻璃	3.4	瓷	5.7
海水	81	玻璃	4~10	二氧化硅	3.8
冰	4.2	纸	2~4	食盐	5.9
干土壤	3~4	云母	6.0	聚乙烯	2.3
酒精	25	胶木	5.0	聚苯乙烯	2.6

图 2-11 显示了平行板电极之间有介质板时的 D 线、 E 线和 P 线之间的关系。对照此图及各矢量的散度公式

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_f + \rho_p}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{P} = -\rho_p$$

我们可以得出以下结论：

- (1) 电位移 D 的散度源是自由电荷， D 线从正的自由电荷出发，终止于负的自由电荷，没有自由电荷的区域，就没有 D 线的起止点，因此 D 线在介质区是穿过的。
- (2) 电场强度 E 的散度源是自由电荷和束缚电荷兼有， E 线从正电荷出发，终止于负电荷。介质中由极化电荷发出的电力线，与自由电荷的电力线方向相反，因此削弱了介质中的电场，造成了 E 线不连续。
- (3) 极化强度 P 的散度源是束缚电荷， P 线从负的束缚电荷出发，终止于正的束缚电荷。 P 线与原 E 线方向相同，在介质中与 $\epsilon_0 E$ 线相加，正好弥补了 E 线的缺失部分，即为连续的 D 线，满足 $D = \epsilon_0 E + P$ 。

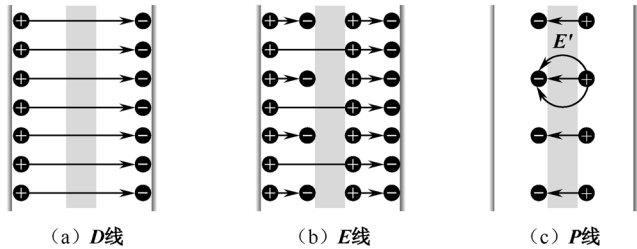


图 2-11 D 线、 E 线和 P 线

介质中静电场的基本方程 综上所述，静电场的基本方程为

积分形式：

$$\begin{cases} \oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = Q \\ \oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \\ \boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \end{cases}$$

微分形式：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \\ \boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} \end{cases}$$

例 2.7 半径为 R , 介电常数为 ε 的介质球球心处有一个点电荷 q , 求球内外的 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{P} 及 ρ_{Ps} 与 ρ_{P} 分布。

解 $r > 0$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_r \frac{q}{4\pi r^2}$$

$0 < r \leq R$

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \mathbf{a}_r \frac{q}{4\pi \varepsilon r^2}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}(\mathbf{r}) - \varepsilon_0 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \mathbf{a}_r \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)q}{4\pi \varepsilon r^2}$$

$$\rho_{\text{P}}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)q}{4\pi \varepsilon r^2} \right) = 0$$

$r > R$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0} = \mathbf{a}_r \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

$r = R$

$$\rho_{\text{Ps}}(R) = \mathbf{P}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \Big|_{r=R} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)q}{4\pi \varepsilon R^2}$$

本节思考与练习

2.12 证明电偶极子远场的电场强度大小为 $E = \frac{p}{4\pi \varepsilon_0 r^3} (1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2}$ 。

2.13 分析例题 2.6, 画出各部分电荷分布所决定的 \mathbf{D} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{P} 矢线图, 束缚电荷满足 $Q_{\text{P}} + Q_{\text{Ps}} = 0$ 吗? 试计算球内外的电位。

2.14 已知相对介电常数为 ε_r 的均匀介质中, 自由电荷体密度为 ρ_{f} , 求束缚电荷体密度。

2.15 已知相对介电常数为 $\varepsilon_r(\mathbf{r})$ 的非均匀介质中, 电场强度分布为 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, 求束缚电荷体密度。

2.16 两个半无限大介质极化强度分别为 \mathbf{P}_1 和 \mathbf{P}_2 , 分界面为 z 平面, 求介质分界面上的束缚电荷面密度。

2.17 两个半无限大介质中电场强度分别为 \mathbf{E}_1 和 \mathbf{E}_2 , 分界面为 z 平面, 求介质分界面上的束缚电荷面密度。

→ 2.5 静电场的边界条件

当静电场中存在两种或两种以上媒质时, 介质表面或分界面总会出现束缚面电荷, 导体表面也可能出现自由面电荷, 这些电荷会成为电场矢量线的起止点, 从而引起场量的突变, 突变的规律应满足场的基本方程的积分形式, 所得到的关系方程称为**边界条件**。

在下面的讨论中, 我们设介质分界面的切线方向为 \mathbf{t} , 法线方向为 \mathbf{n} , 且 \mathbf{n} 由介质 2 指向介质 1。显然, $\mathbf{n} \perp \mathbf{t}$, 且这样规定的法向 \mathbf{n} 在介质分界面上的任意一点具有唯一性,

而 \mathbf{t} 则在切平面上方向任意, 因此, 在边界条件的表达式中, 采用 $\mathbf{n} \cdot$ 来表示矢量在介质分界面的法向分量, 用 $\mathbf{n} \times$ 来表示矢量在介质分界面的切向分量。

2.5.1 两种介质分界面上的边界条件

一、法向边界条件

如图 2-12 所示, 在介质分界面上取一个柱形闭合面, 使上、下底面分居于分界面两侧, 且与分界面平行, 柱高 $\Delta h \rightarrow 0$ 。对该闭合面应用高斯定律

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2) \Delta S = \rho_S \Delta S$$

得到

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S \quad \text{或} \quad D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \quad (2.5.1)$$

式中, ρ_S 是介质分界面上的自由电荷密度。

在静电场中, 理想介质分界面上一般没有自由电荷分布, 此时, $\rho_S = 0$, 则式 (2.5.1) 变为

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 \quad \text{或} \quad D_{1n} = D_{2n} \quad (2.5.2)$$

表明在两种介质分界面上, 电位移的法向分量连续。

若用电位表示, 则有

$$-\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \rho_S \quad (2.5.3)$$

$\rho_S = 0$ 时, 有

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \quad (2.5.4)$$

式 (2.5.1) ~ 式 (2.5.4) 即称为介质分界面的法向边界条件。

二、切向边界条件

如图 2-13 所示, 在介质分界面上取一个矩形闭合路径 C , 使两个长边 Δl 分居于分界面两侧, 且与分界面平行, 两个短边 $\Delta h \rightarrow 0$ 。若设环绕方向顺时针, 上边的矢量线元设为 $\mathbf{t} \Delta l$, 下边的矢量线元为 $-\mathbf{t} \Delta l$, 环路所围面积的方向为 \mathbf{s} , 则 \mathbf{t} 、 \mathbf{s} 、 \mathbf{n} 相互垂直, 且有 $\mathbf{t} = \mathbf{s} \times \mathbf{n}$ 。对该闭合回路应用环量方程, 得到

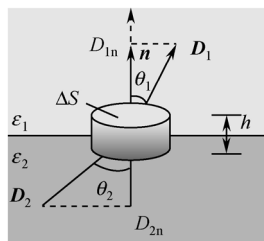


图 2-12 介质分界面的法向边界条件

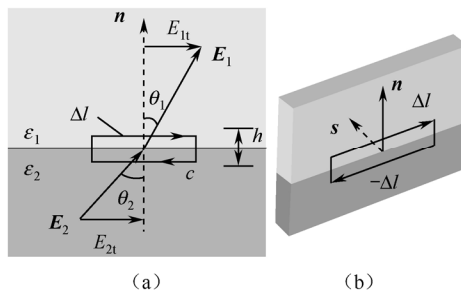


图 2-13 介质分界面的切向边界条件

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_1 \cdot t\Delta l - E_2 \cdot t\Delta l = 0$$

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (2.5.5)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (2.5.6)$$

表明在两种介质分界面上, 电场强度的切向分量连续。用矢量可表示为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \quad (2.5.7)$$

用电位表示为

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (2.5.8)$$

式(2.5.6)~式(2.5.8)称为介质分界面的切向边界条件。

2.5.2 介质与导体分界面上的边界条件

处在静电场中的导体在导体中的自由电子经过短暂运动而使电荷重新分布后, 将达到静电平衡状态, 此时, 导体内部 $\mathbf{E}_{\text{内}} = \mathbf{D}_{\text{内}} = 0$, 电荷均匀分布在表面上, 整个导体是一个等位体, 导体表面是一个等位面。若设导体外部的场量为 \mathbf{E} 、 \mathbf{D} , 导体的外法线方向为 \mathbf{n} , 则与式(2.5.2)、式(2.5.6)对应的导体与介质分界面上的边界条件为

$$D_n = \rho_s \quad (2.5.9)$$

$$E_t = 0 \quad (2.5.10)$$

与式(2.5.3)、式(2.5.8)对应的用电位表示的导体与介质分界面上的边界条件为

$$-\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \rho_s \quad (2.5.11)$$

$$\Phi = \text{const} \quad (2.5.12)$$

注意, 上述所有边界条件方程式的两边其实都应写成 $(\cdots)|_s$, 只是为书写方便而省略了。

例 2.8 如图 2-14 所示的平行板电容器的极板面积为 S , 带电量分别为 Q 和 $-Q$ 。电容器的一部分用电容率为 ε 的介质填充, 另一部分为空气。求电容器的电容量。

解 平板电容内若充满同一种线性、各向同性、均匀介质, 电场强度将均匀分布。本题中, 在介质与空气分界面及介质(空气)与导体分界面上, 还应满足边界条件, 因此有

$$D = D_1|_{s\text{中}} = D_2|_{s\text{中}} = D_1|_{s\text{上}} = D_2|_{s\text{下}} = Q/S$$

空气和介质中电场强度是不相同的, 有

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} \quad E_2 = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon S}$$

上、下两极板间电压为

$$U = E_1(h-d) + E_2d = \frac{Q}{S} \left(\frac{h-d}{\varepsilon_0} + \frac{d}{\varepsilon} \right)$$

电容量为

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{\varepsilon(h-d) + \varepsilon_0 d}$$

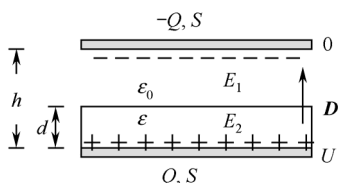


图 2-14 部分填充介质的平板电容

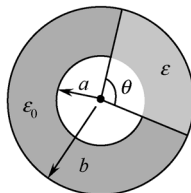


图 2-15 部分填充介质的同轴电缆

例 2.9 两同轴导体圆柱，半径分别为 a 和 b ，圆柱间在 θ 角部分填充电容率为 ε 的介质，其余部分为空气，其截面如图 2-15 所示。若外加电压 U ，求介质和空气中的电场以及单位长度的电容。

解 同轴内若充满同一种线性、各向同性、均匀介质，则由例 2.4 可知，电场强度将沿径向分布，为

$$E_\rho = \frac{U}{\rho \ln \frac{b}{a}}$$

本题中， a_ρ 处在介质与空气分界面的切向上，而电场强度应满足切向连续，因此有

$$E_1 = E_2 = a_\rho E_\rho = a_\rho \frac{U}{\rho \ln \frac{b}{a}}$$

两部分的电位移不相等，即

$$D_1 = \varepsilon_0 E_1 = a_\rho \frac{\varepsilon_0 U}{\rho \ln \frac{b}{a}} \quad D_2 = \varepsilon E_2 = a_\rho \frac{\varepsilon U}{\rho \ln \frac{b}{a}}$$

内导体与空气分界面上及内导体与介质分界面上的电荷密度分别为

$$\rho_{S1} = D_1(a) = \frac{\varepsilon_0 U}{a \ln \frac{b}{a}} \quad \rho_{S2} = D_2(a) = \frac{\varepsilon U}{a \ln \frac{b}{a}}$$

内导体上单位长度的带电量为

$$\rho_l = \rho_{S1}(2\pi - \theta)a + \rho_{S2}\theta a = \frac{[\varepsilon_0(2\pi - \theta) + \varepsilon\theta]U}{\ln \frac{b}{a}}$$

单位长度的电容为

$$C_0 = \frac{\rho_l}{U} = \frac{\varepsilon_0(2\pi - \theta) + \varepsilon\theta}{\ln \frac{b}{a}}$$

本节思考与练习

2.18 试证明式 (2.5.7), 即 $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2$ 。

2.19 试证明式 (2.5.8), 即电位在介质分界面处保持连续。

2.20 在介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 的介质分界面上, 电场矢量会发生突变, 设场矢量与介质分界面的法向 \mathbf{n} 的夹角分别为 θ_1 和 θ_2 , 试导出 θ_1 和 θ_2 之间的关系式。

2.6 电位的二阶微分方程

按照亥姆霍兹定理, 矢量场由其散度和旋度唯一地确定。静电场的基本方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\mathbf{E} = -\nabla \Phi)$$

若体电荷是分布在线性、均匀、各向同性介质中, 则 $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, 且 ε 为常数。联立两个方程, 可得电位 Φ 的方程为

$$\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi) = -\rho_f$$

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon} \quad (2.6.1)$$

$\rho_f \neq 0$ 时, 式 (2.6.1) 是非齐次的二阶微分方程, 称为电位的泊松方程; $\rho_f = 0$ 时, 式 (2.6.1) 变为

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.6.2)$$

它是齐次的二阶微分方程, 称为电位的拉普拉斯方程。拉普拉斯算子 ∇^2 在各坐标系中的表达式见式 (1.5.15) ~ 式 (1.5.17)。

对于电荷分布已知且无边界的静电场问题, 可利用场源积分法由式 (2.3.7) ~ 式 (2.3.9) 直接求得电位; 对于体电荷分布已知且有边界的静电场问题, 在体电荷分布区域, 电位满足泊松方程, 在没有电荷分布的区域, 电位满足拉普拉斯方程, 在分界面上, 电位还应满足边界条件, 这类问题的求解称为边值问题。

1.6 节中用矢量表示的唯一性定理用电位可表示为: 若在整个边界上电位已知 (第一类边界条件), 或电位的法向导数已知 (第二类边界条件), 或一部分边界上电位已知, 其余部分边界上电位的法向导数已知 (第三类边界条件), 则满足泊松方程或拉普拉斯方程的电位的解 (除了一个与电位零参考点有关的常数外) 是唯一的。

下面, 我们先就一维场举几个例子。

例 2.10 如图 2-16 所示, 两个无限大平面电极, 相距为 d , 电位分别为 0 和 V , 板间充满密度为 $\rho_0 x/d$ 的体电荷, 求极板间的电位分布、电场强度和极板上的电荷面密度。

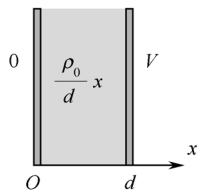


图 2-16 例 2.10 图

解 极板间充满体电荷, 电位应满足泊松方程, 且仅是 x 的函数:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{d^2 \Phi}{dx^2} = -\frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0 d}$$

直接积分得

$$\Phi = -\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 d} + C_1 x + C_2$$

带入边界条件 $x=0$ 时, $\Phi=0$, 得

$$C_2=0$$

$x=d$ 时, $\Phi=V$, 得

$$c_1 = \frac{V}{d} + \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0}$$

因而

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{\rho_0 x^3}{6\varepsilon_0 d} + \left(\frac{V}{d} + \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0} \right) x \\ \mathbf{E} &= -\nabla \Phi = -\mathbf{a}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\mathbf{a}_x \left[\frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0 d} \left(\frac{V}{d} + \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0} \right) \right] \end{aligned}$$

$x=0$ 处极板内侧的法向 $\mathbf{n}=\mathbf{a}_x$, 故有

$$\rho_{S1} = \varepsilon_0 \mathbf{E}|_{x=0} = -\varepsilon_0 \left(\frac{V}{d} + \frac{\rho_0 d}{6\varepsilon_0} \right) = -\frac{\varepsilon_0 V}{d} - \frac{\rho_0 d}{6}$$

$x=d$ 处极板内侧的法向 $\mathbf{n}=-\mathbf{a}_x$, 故有

$$\rho_{S2} = -\varepsilon_0 \mathbf{E}|_{x=d} = -\frac{\varepsilon_0 V}{d} - \frac{\rho_0 d}{3}$$

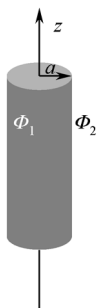


图 2-17 例 2.11 图

例 2.11 一个半径为 a 的无限长圆柱区域内均匀分布体电荷, 设单位长度带电量为 ρ_l , 圆柱内外介电常数均为 ε_0 , 求圆柱内外的电位分布和电场强度。

解 设圆柱内外的电位分别为 Φ_1 和 Φ_2 , 它们分别满足泊松方程和拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 \Phi_1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \right) = -\frac{\rho_l}{\varepsilon_0 \pi a^2} \quad (\rho \leq a)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (\rho \geq a)$$

直接积分得

$$\Phi_1 = -\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \rho^2 + A \ln \rho + B \quad (\rho \leq a)$$

$$\Phi_2 = C \ln \rho + D \quad (\rho \geq a)$$

上面的解式中有 4 个系数需要确定, 因此需要 4 个条件方程。首先, 我们注意到 Φ_1 的通解中包含有奇点 $\rho=0$, 而在这些点上体电荷密度是有限值, 不会出现无穷大的电位, 因此必须有 $A=0$ 。其次, 由于电荷的分布延伸至无穷远, 因而不能取无穷远为参考点, 若取在 $\rho=0$ 处, 则 $B=0$, 可使 Φ_1 的表达式最简单。从而

$$\Phi_1 = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 a^2} \rho^2 \quad (\rho \leq a)$$

像这样包含在具体问题中, 可以使问题得到合理解的条件, 称为自然边界条件。最后, 在 $\rho=a$ 分界面上 Φ_1 和 Φ_2 应满足的切向和法向边界条件为

$$\begin{cases} \Phi_1(a) = \Phi_2(a) \\ \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C \ln a + D = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 a^2} a^2 \\ \frac{C}{a} = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 a^2} a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \\ D = -\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} + \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln a \end{cases}$$

故

$$\Phi_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{a}{\rho} - \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \quad (\rho \geq a)$$

$$E_1 = -\nabla \Phi_1 = -a_\rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} = a_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 a^2} \rho \quad (\rho \leq a)$$

$$E_2 = -\nabla \Phi_2 = -a_\rho \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} = a_\rho \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 \rho} \quad (\rho \geq a)$$

例 2.12 一个半径为 b 的球形区域中充满密度为 $\rho(r) = b^2 - r^2$ 的体电荷, 计算球内外的电位和电场强度。

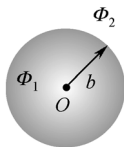


图 2-18 例 2.12 图

解 设球内外的电位分别为 Φ_1 和 Φ_2 , 它们分别满足泊松方程和拉普拉斯方程:

$$(1) \text{ 当 } \rho \leq b, \quad \nabla^2 \Phi_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\epsilon_0} (b^2 - r^2)$$

直接积分, 得

$$r^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = -\frac{b^2 r^3}{3\epsilon_0} + \frac{r^5}{5\epsilon_0} + C_1$$

$$\Phi_1 = \frac{b^2 r^2}{6\epsilon_0} + \frac{r^4}{20\epsilon_0} - \frac{C_1}{r} + C_2$$

该解式中包含 $r = 0$ 点, 由于该点上电荷密度为有限值, 电位也应有限, 因此, 必须有 $C_1 = 0$ 。故

$$\Phi_1 = \frac{b^2 r^2}{6\epsilon_0} + \frac{r^4}{20\epsilon_0} + C_2$$

$$(2) \text{ 当 } \rho \geq b, \quad \nabla^2 \Phi_2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right) = 0$$

积分得

$$\Phi_2 = \frac{C_3}{r} + C_4$$

在本题中, 电荷分布在有限区域, 若取 $r \rightarrow \infty$ 作为电位参考点, 可使 Φ_2 的表达式最简单。于是定出 $C_4 = 0$, 从而

$$\Phi_2 = \frac{C_3}{r}$$

(3) $r = b$ 球面上, Φ_1 和 Φ_2 应满足法向和切向边界条件:

$$\begin{cases} \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \Big|_{r=b} = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \Big|_{r=b} \\ \Phi_1(b) = \Phi_2(b) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{5} = -\frac{\epsilon_0}{b^2} C_3 \\ -\frac{b^4}{6\epsilon_0} + \frac{b^4}{20\epsilon_0} + C_2 = -\frac{C_3}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_3 = \frac{2b^5}{15\epsilon_0} \\ C_2 = \frac{b^4}{4\epsilon_0} \end{cases}$$

故有

$$\Phi_1 = -\frac{b^2 r^2}{6\epsilon_0} + \frac{r^4}{20\epsilon_0} + \frac{b^4}{4\epsilon_0} \quad (\rho \leq b)$$

$$\Phi_2 = \frac{2b^5}{15\epsilon_0 r} \quad (\rho \geq b)$$

$$E_1 = -\nabla \Phi_1 = -a_r \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = a_r \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{b^2 r}{3} - \frac{r^3}{5} \right) \quad (\rho \leq b)$$

$$E_2 = -\nabla \Phi_2 = -a_r \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = a_r \frac{2b^5}{15\epsilon_0 r^2} \quad (\rho \geq b)$$

本节思考与练习

2.21 介电常数为 $\epsilon(r)$ 的某非均匀介质中分布有体电荷 ρ_f , 试导出电位 Φ 所满足的微分方程。

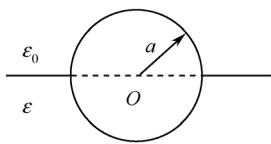


图 2-19 一半埋入介质中的导体球

2.22 半径为 a 的孤立导体球一半埋入介电常数为 ϵ 的无限大介质中, 另一半在空气中, 如图 2-19 所示。设导体球电位为 V , 求介质和空气中的电位、电场强度和该导体球的电容。

2.7 分离变量法

在求解拉普拉斯方程的边值问题中,若给定边界面可与一个适当的坐标系的坐标面相合,或者至少分段地与坐标面相合;并且待求电位解可表示为三个函数的乘积,其中每个函数分别仅含有一个坐标变量,则这类边值问题可用分离变量法求解。

2.7.1 直角坐标系分离变量法

当给定边界限于长方体区域时,应该选择直角坐标系。在直角坐标系下,电位的拉普拉斯方程可展开为

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.7.1)$$

设电位 Φ 可表示为三个一维坐标函数的乘积

$$\Phi = X(x)Y(y)Z(z) \quad (2.7.2)$$

将 Φ 代入式 (2.7.1),并在方程两边同除以非零解 $X(x)Y(y)Z(z)$,得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \quad (2.7.3)$$

方程左边的三项分别是 x 、 y 和 z 的函数,对任何 x 、 y 和 z 的值,方程恒为零,只有每一项都等于常数:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k_x^2 \quad (2.7.4)$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2 \quad (2.7.5)$$

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = -k_z^2 \quad (2.7.6)$$

式中, k_x 、 k_y 、 k_z 称为分离常数且满足

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0 \quad (2.7.7)$$

由式 (2.7.7) 可知,三个分离常数中只有两个是独立的,且它们不可能全是实数,也不能全是虚数。解的形式则由分离常数值决定,以 $X(x)$ 的解为例:

当 k_x 为实数时, $X(x)$ 解的形式为三角函数

$$X(x) = A_1 \sin k_x x + B_1 \cos k_x x \quad (2.7.8)$$

当 k_x 为虚数时,即 $k_x = j\alpha_x$,其中 α_x 是实数, $X(x)$ 解的形式为双曲函数或指数函数,即

$$X(x) = A_2 \sinh \alpha_x x + B_2 \cosh \alpha_x x \quad (2.7.9)$$

或

$$X(x) = A_3 e^{\alpha_x x} + B_3 e^{-\alpha_x x} \quad (2.7.10)$$

当 $k_x = 0$ 时, $X(x)$ 解的形式为

$$X(x) = A_4 x + B_4 \quad (2.7.11)$$

这些解函数具有不同的特征,如图 2-20 所示。对于具体的边界,可从中选取相符的函数形式,并确定分离常数。

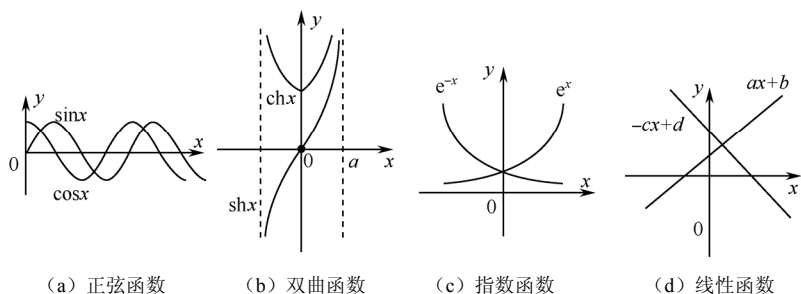


图 2-20 分离函数对应的曲线形式

$Y(y)$ 和 $Z(z)$ 的解的形式与上述对 $X(x)$ 的讨论相类似。而 Φ 的通解中的积分常数则由边界条件中的非零值来决定。

例 2.13 求图 2-21 中一个长方体内的电位。设 $z = c$ 面的电位 $\Phi = V$, V 为常数,其他各表面电位都为零。

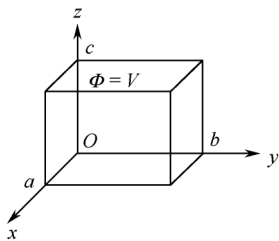


图 2-21 例 2.13 图

解 为了满足 $\Phi|_{x=0} = 0$ 和 $\Phi|_{x=a} = 0$ 的边界条件,只有取

$$X(x) = A \sin k_x x$$

且 k_x 必须满足

$$\sin k_x a = 0$$

即

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

其中, $k_x^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$ 称为本征值,它的意义是,在上述边界条件下,只有取这些特定的值的微分方程才有非零解,而相应的函数 $\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$,称为本征函数。这样, $X(x)$ 的一般解可以表示为

$$X(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$$

A_m 为待定系数。同样可求得 $Y(y)$ 的表达式

$$Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

为满足 $\Phi|_{z=0} = 0$ 的边界条件, $Z(z)$ 必须选择 $\sinh \alpha z$, 其中

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

这样得到电位的通解形式为

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} z\right]$$

带入 $\Phi|_{z=c} = V$ 的边界条件, 得到

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} c\right] = V$$

其中, C_{mn} 可由三角函数的正交性确定: 用 $\sin\left(\frac{s\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{t\pi}{b}y\right)$ 乘以上述方程的两边,

并对 x 从 $0 \rightarrow a$ 积分, 对 y 从 $0 \rightarrow b$ 积分。其中方程的左边, 由于三角函数的正交性, 除去 $m=s$ 和 $n=t$ 的项外, 其余各项积分为零。故得

$$\begin{aligned} \int_0^b \int_0^a C_{st} \sin^2\left(\frac{s\pi}{a}x\right) \sin^2\left(\frac{t\pi}{b}y\right) \sinh\left[\sqrt{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b}\right)^2} c\right] dx dy \\ = \int_0^b \int_0^a V \sin\left(\frac{s\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{t\pi}{b}y\right) dx dy \end{aligned}$$

算出积分后, 得到

$$C_{st} = \begin{cases} \frac{16V}{st\pi^2} \frac{1}{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{s\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{t\pi}{b}\right)^2} c\right]}, & s, t \text{ 均为奇数} \\ 0, & s, t \text{ 均为偶数} \end{cases}$$

因此, 电位的通解为

$$\Phi = \frac{16V}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{(2m-1)\pi x}{a} \sin\frac{(2n-1)\pi y}{b}}{(2m-1)(2n-1)} \frac{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{2m-1}{a}\pi\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{b}\pi\right)^2} z\right]}{\sinh\left[\sqrt{\left(\frac{2m-1}{a}\pi\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{b}\pi\right)^2} c\right]}$$

例 2.14 如图 2-22 所示, 无限长金属槽, 两平行侧壁相距为 a , 高度向上方无限延伸, 两侧壁的电位为零, 槽底电位为 $\Phi = 0$ 。求槽内电位分布。

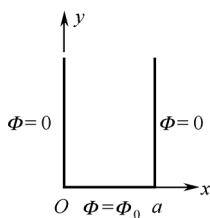


图 2-22 例 2.14 图

解 由边界条件容易写出槽内的电位解的形式为

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\frac{m\pi}{a}y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$$

利用边界条件 $\Phi|_{y=0} = \Phi_0$, 得

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) = \Phi_0$$

对上述方程两边乘以 $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, 并对 x 从 $0 \rightarrow a$ 积分, 得到

$$\frac{a}{2} C_n = \int_0^a \Phi_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{a\Phi_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

当 n 为奇数时, 得到

$$C_n = \frac{4\Phi_0}{n\pi}$$

因此槽内电位的解为

$$\Phi = \frac{4\Phi_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)} e^{-\frac{(2m-1)\pi}{a}y} \sin\left(\frac{(2m-1)\pi}{a}x\right)$$

槽内的电位分布如图 2-23 所示。

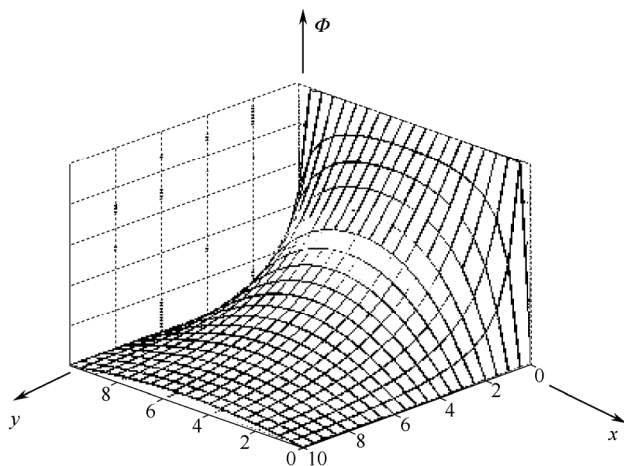


图 2-23 例 2.14 的电位分布

例 2.15 一接地无限长矩形金属管如图 2-24 所示, 有一线电荷密度为 λ 的直线位于管内 (x_0, y_0) 处, 且与 z 轴平行求管内电位分布。

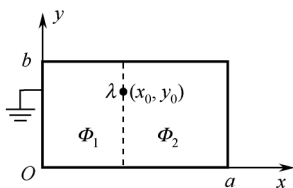


图 2-24 例 2.15 图

解 在管内作 $x=x_0$ 处的纵截面, 设此纵截面两侧的电位函数分别为 Φ_1 和 Φ_2 , 根据边界条件, 电位的通解必须具有如下的形式

$$\Phi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left(\frac{m\pi}{b}x\right)$$

$$\Phi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left(\frac{m\pi}{b}(a-x)\right)$$

当 $x=x_0$ 时, 电位 Φ_1 和 Φ_2 应该满足边界条件:

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{\lambda \delta(y-y_0)}{\epsilon_0}$$

将以上条件, 代入 Φ_1 和 Φ_2 的表达式, 得到

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left(\frac{m\pi}{b}x_0\right) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \sinh\left(\frac{m\pi}{b}(a-x_0)\right)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{m\pi}{b} \sin\frac{m\pi y}{b} \cosh\frac{m\pi x_0}{b} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{m\pi}{b} \sin\frac{m\pi y}{b} \cosh\frac{m\pi(a-x_0)}{b} = \frac{\lambda \delta(y-y_0)}{\epsilon_0}$$

对以上两个方程同乘以 $\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$, 并对 y 从 $0 \rightarrow b$ 积分, 得

$$A_n \sinh\frac{n\pi x_0}{b} = B_n \sinh\frac{n\pi(a-x_0)}{b}$$

$$A_n \cosh\frac{n\pi x_0}{b} + B_n \cosh\frac{n\pi(a-x_0)}{b} = \frac{2\lambda}{n\pi\epsilon_0} \sin\frac{n\pi y_0}{b}$$

解出

$$A_n = \frac{2\lambda}{n\pi\epsilon_0} \frac{\sinh\frac{n\pi(a-x_0)}{b}}{\sinh\frac{n\pi a}{b}} \sin\frac{n\pi y_0}{b}$$

$$B_n = \frac{2\lambda}{n\pi\epsilon_0} \frac{\sinh\frac{n\pi x_0}{b}}{\sinh\frac{n\pi a}{b}} \sin\frac{n\pi y_0}{b}$$

因此管内电位

$$\Phi_1 = \frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \frac{n\pi(a-x_0)}{b} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{n \sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \left(\frac{n\pi}{b} x \right)$$

$$\Phi_2 = \frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh \frac{n\pi x_0}{b} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{n \sinh \frac{n\pi a}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \left(\frac{n\pi}{b} (a-x) \right)$$

管内的电位分布如图 2-25 所示。

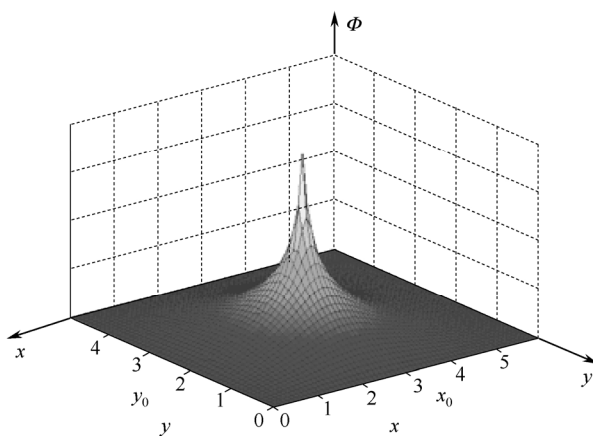


图 2-25 例 2.15 的电位分布图

2.7.2 圆柱坐标系分离变量法

对于圆柱边界限定的区域，拉普拉斯方程展开为

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\rho^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.7.12)$$

这里，仅考虑当电位 Φ 沿 z 方向没有变化的二维场的情形，此时电位 Φ 与坐标 z 无关，拉普拉斯方程简化为

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.7.13)$$

令方程有如下的分离变量解

$$\Phi(\rho, \varphi) = f(\rho)g(\varphi) \quad (2.7.14)$$

将上式代入方程 (2.7.13)，并对方程两边同除以非零解 $f(\rho)g(\varphi)$ ，得到

$$\frac{\rho}{f(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{g(\varphi)} \frac{\partial^2 g(\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.7.15)$$

显然, 要使上述方程成立, 其左边的两项都必须为常数, 不妨令

$$\frac{\rho}{f(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \right) = v^2 \quad (2.7.16)$$

$$\frac{1}{g(\varphi)} \frac{\partial^2 g(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -v^2 \quad (2.7.17)$$

由方程 (2.7.17), 可以解出

$$g(\varphi) = A \sin v\varphi + B \cos v\varphi \quad (2.7.18)$$

由于 φ 的变化范围是 $0 \rightarrow 2\pi$, 则必有

$$\Phi[v(\varphi + 2\pi)] = \Phi(v\varphi)$$

上式成立的条件是: v 必须为整数 m 。当 $m \neq 0$ 时, 方程 (2.7.14) 的解为

$$g(\varphi) = A_m \sin m\varphi + B_m \cos m\varphi$$

此时, 方程 (2.7.16) 变成

$$\frac{\rho}{f(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} \right) = m^2$$

上式展开即为欧拉方程

$$\rho^2 \frac{\partial^2 f(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial f(\rho)}{\partial \rho} - m^2 f(\rho) = 0 \quad (2.7.19)$$

其解为

$$f(\rho) = C_m \rho^m + D_m \rho^{-m} \quad (2.7.20)$$

故拉普拉斯方程 (2.7.13) 的通解为

$$\Phi(\rho, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + B_m \rho^{-m})(C_m \sin m\varphi + D_m \cos m\varphi) \quad (2.7.21)$$

上式中的各特征值及积分常数由具体边界条件确定。

例 2.16 半径为 b 的中空长圆柱形导体, 等分成 4 块, 轴线为 z 轴, 导体上的电位如图 2-26 所示, 求圆筒内电位分布。

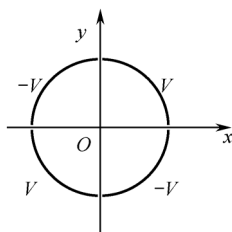


图 2-26 例 2.16 图

解 由图 2-26 可以看出, 电位函数 $\Phi(\rho, \varphi)$ 应该是圆柱坐标 φ 的奇函数, 且包括 $\rho = 0$ 点, 于是由式 (2.7.21), 圆筒内电位的解的形式应为

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \rho^m \sin m\varphi$$

边界上电位满足

$$\Phi(b, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m b^m \sin m\varphi = \begin{cases} V, & 0 < \varphi < \pi/2 \\ -V, & \pi/2 < \varphi < \pi \\ V, & \pi < \varphi < 3\pi/2 \\ -V, & 3\pi/2 < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

对以上方程左右两边同乘以 $\sin m\varphi$ ，并对 φ 从 $0 \rightarrow 2\pi$ 积分，得到

$$A_m = \frac{8V}{m\pi} b^{-m} \quad m = 2, 6, L, (4k-2), L \quad \text{其中 } k = 1, 2, 3, L$$

因此圆筒内的电位为

$$\Phi(\rho, \varphi) = \frac{4V}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{b}\right)^{4m-2} \frac{\sin(4m-2)\varphi}{2m-1}$$

电位分布示意图如图 2-27 所示。

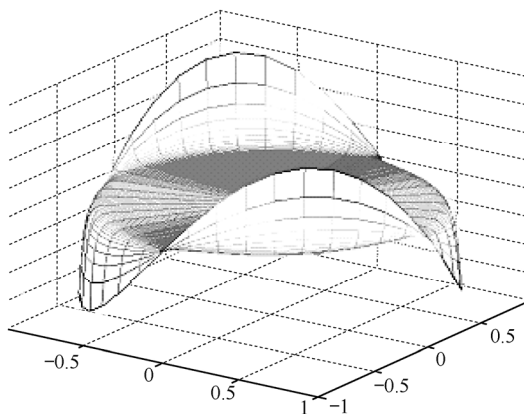


图 2-27 圆筒内电位分布

例 2.17 在均匀外加电场 E_0 中，垂直于电场方向放置一个半径为 a 的无限长介质圆柱。柱内外的介电常数分别为 ε_1 和 ε_2 ，如图 2-28 所示。求此介质圆柱体内外的电位函数。

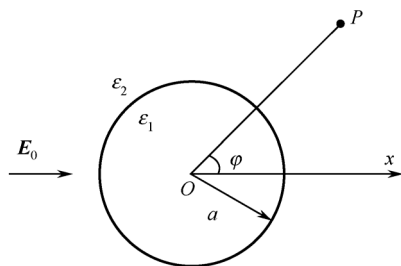


图 2-28 例 2.17 图

解 选取圆柱坐标系，且圆柱体的轴线和 z 轴重合，并使 x 轴的正方向和外加的电场方向一致，如图 2-28 所示。在圆柱坐标系中， $x = \rho \cos \varphi$ ，外加电场可以用电位函数

$\Phi_0 = -E_0 x$ 来表示, 故

$$\Phi_0 = -E_0 \rho \cos \varphi$$

由于电位满足拉普拉斯方程, 且与 z 坐标无关, 因此电位具有式 (2.7.21) 的通解形式。又由于电位分布关于 x 轴对称, 因而电位 Φ 是坐标 φ 的偶函数, 故介质圆柱内外的电位 Φ_1 和 Φ_2 可表示成

$$\Phi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + B_m \rho^{-m}) \cos m\varphi$$

$$\Phi_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \rho^m + D_m \rho^{-m}) \cos m\varphi$$

应用自然边界条件: (1) 由于圆柱体内包含 $\rho=0$ 点, 因而只有系数 $B_m=0$, 才能使 Φ_1 的值有限, 所以

$$\Phi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \rho^m \cos m\varphi$$

(2) 对于 Φ_2 来说, 当 $\rho \rightarrow \infty$ 时, $\Phi_2 \rightarrow \Phi_0 = -E_0 \rho \cos \varphi$
由此式可见, 当 $m \neq 1$ 时, $C_m=0$; 当 $m=1$ 时, $C_1 = -E_0$, 因此有

$$\Phi_2 = -E_0 \rho \cos \varphi + \sum_{m=1}^{\infty} D_m \rho^{-m} \cos m\varphi$$

在介质分界面 $\rho=a$ 上, 电位 Φ_1 和 Φ_2 满足的分界面上的边界条件是

$$\begin{aligned} \Phi_1(a) &= \Phi_2(a) \\ \varepsilon_1 \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} &= \varepsilon_2 \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=a} \end{aligned}$$

将前面得到的圆柱内外电位函数的表达式分别代入上面两式, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} A_m a^m \cos m\varphi &= -E_0 a \cos \varphi + \sum_{m=1}^{\infty} D_m a^{-m} \cos m\varphi \\ \varepsilon_1 \sum_{m=1}^{\infty} A_m m a^{m-1} \cos m\varphi &= \varepsilon_2 \left[-E_0 \cos \varphi - \sum_{m=1}^{\infty} D_m m a^{-(m+1)} \cos m\varphi \right] \end{aligned}$$

以上两个方程对任意坐标 φ 都应该成立, 因而方程两边同类项的系数就必须相等。

当 $m=1$ 时, 有

$$\begin{aligned} A_1 a &= -E_0 a + D_1 a^{-1} \\ \varepsilon_1 A_1 &= -\varepsilon_2 E_0 - \varepsilon_2 D_1 a^{-2} \end{aligned}$$

当 $m \neq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} A_m a^m &= D_m a^{-m} \\ \varepsilon_1 A_m m a^{m-1} &= -\varepsilon_2 D_m m a^{-(m+1)} \end{aligned}$$

由以上四个方程联立解得

$$A_1 = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0$$

$$D_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^2 E_0$$

$$A_m = 0 \quad m \neq 1$$

$$D_m = 0 \quad m \neq 1$$

将以上所得常数代入圆柱体内、外电位函数的表达式, 可得电位

$$\Phi_1 = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 \rho \cos \varphi$$

$$\Phi_2 = -E_0 \rho \cos \varphi + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{a^2 E_0}{\rho} \cos \varphi$$

若用直角坐标表示, 由 $x = \rho \cos \varphi$, 可得

$$\Phi_1 = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 x$$

$$\Phi_2 = -E_0 x + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{a^2 E_0 x}{x^2 + y^2}$$

可见, 圆柱内的电场是与外加电场方向相同的匀强场, 且 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ 时, 小于外电场, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ 时, 大于外电场; 而圆柱外的电场, 在圆柱附近, 场线有弯曲; 在远离圆柱时, 介质圆柱的影响将消失, 如图 2-29 所示。这是由于介质被极化后形成的极化电荷与外电场共同作用的结果。

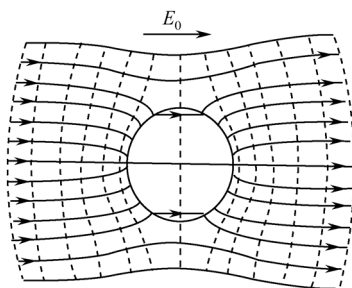


图 2-29 匀强场中的介质圆柱

2.7.3 球坐标系的分离变量法

在求解球空间或有球面边界的场问题时, 采用球坐标比较方便。球坐标中电位的拉普拉斯方程为

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.7.22)$$

一、二维场的变量分离

这里我们仅讨论球坐标下具有轴对称的二维场情形, 即场分布与坐标 φ 无关, 此时拉普拉斯方程简化为

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.7.23)$$

设待求电位函数可以分离变量为

$$\Phi = f(r)g(\theta) \quad (2.7.24)$$

将上式代入方程 (2.7.23), 并整理得

$$\frac{1}{f(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{g(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.7.25)$$

显然方程成立的条件是左边的两项都必须是常数, 并且符号相反。令这两个常数分别为 $-\lambda$ 和 λ , 于是得到关于 $f(r)$ 和 $g(\theta)$ 的常微分方程为

$$\frac{1}{f(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = \lambda \quad (2.7.26)$$

$$\frac{1}{g(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) = -\lambda \quad (2.7.27)$$

做变换 $x = \cos \theta$, 则有

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \frac{d}{dx}$$

方程 (2.7.27) 可以写成

$$\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dg(x)}{dx} + \lambda g(x) = 0 \quad (2.7.28)$$

上式称为**勒让德方程**。根据数理方程的知识, 方程在区间 $0 \leq \theta \leq \pi$, 即 x 从 1 到 -1 的区间具有有界解的条件是常数 $\lambda = m(m+1)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, 此时的勒让德方程的有界解是一个 m 阶多项式, 称为**勒让德多项式**, 其通式为

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m \quad (2.7.29)$$

二、勒让德多项式的特性

关于勒让德多项式, 我们在这里仅列举出以下几个有用的特性。

(1) 奇偶性: 当 m 为奇数时, $P_m(x)$ 只有奇次项; 当 m 为偶数时, $P_m(x)$ 只有偶次项。下面是勒让德多项式的前几项:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x = \cos \theta$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{1}{2}(5\cos^3 \theta - 3\cos \theta)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \frac{1}{8}(35\cos^4 \theta - 30\cos^2 \theta + 3)$$

L L

(2) 特殊值:

当 $x=1$ 时, $P_m(1)=1$; 当 $x=-1$ 时, $P_m(-1)=(-1)^m$;

当 $x=0$ 时, $P_m(0)=0$ (m 为奇数); $P_m(0)=(-1)^{\frac{m}{2}} \frac{(m-1)!!}{m!!}$ (n 为偶数),

式中, $(m-1)!!=(m-1)(m-3)\cdots 5\times 3\times 1$

$m!!=m(m-2)(m-4)\cdots 6\times 4\times 2$

并约定 $0!!=1$; $(-1)!!=1$ 。

(3) 正交性:

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \int_0^\pi P_m(\cos\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \begin{cases} \frac{2}{2m+1}, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases} \quad (2.7.30)$$

(4) 傅里叶—勒让德多项式级数:

对满足一定条件的函数 $f(x)$, 可展开为傅里叶—勒让德级数, 即

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(x) \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (2.7.31)$$

其中系数

$$c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_m(x)dx \quad (2.7.32)$$

(5) 递推公式 ($m \geq 1$):

$$(m+1)P_{m+1}(x) = (2m+1)xP_m(x) - mP_{m-1}(x) \quad (2.7.33)$$

$$P'_{m+1}(x) - 2xP'_m(x) + P'_{m-1}(x) = P_m(x) \quad (2.7.34)$$

$$(2m+1)P_m(x) = P'_{m+1}(x) - P'_{m-1}(x) \quad (2.7.35)$$

三、二维场的分离变量解

将 $\lambda = m(m+1)$ 代入方程 (2.7.26), 得到欧拉方程

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) - m(m+1)f(r) = 0$$

其解为

$$f(r) = Ar^m + Br^{-(m+1)} \quad (2.7.36)$$

于是我们得到球坐标系二维场的电位函数的通解为

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m r^m + B_m r^{-(m+1)}] P_m(\cos\theta) \quad (2.7.37)$$

上式中的各特征值及积分常数同样由具体边界条件确定。

例 2.18 半径为 a , 介电常数为 ε 的介质球置于匀强电场 E_0 中, 求球内、外的电位分布。

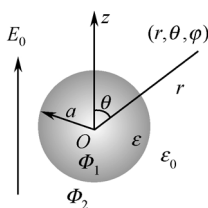


图 2-30 例 2.18 图

解 设 $\mathbf{E}_0 = \mathbf{a}_z E_0$, 如图 2-30 所示。若取 $z=0$ 为零电位点, 则匀强电场的电位可表示为

$$\Phi_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$$

球内、外的电位由匀强场和球表面极化电荷共同产生, 满足拉普拉斯方程。根据式 (2.7.31), 球内、外的电位解可分别写为如下形式:

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m r^m + B_m r^{-(m+1)}] P_m(\cos \theta)$$

$$\Phi_2(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [C_m r^m + D_m r^{-(m+1)}] P_m(\cos \theta)$$

应用自然边界条件: (1) $r=0$ 时电位为零, 即 $\Phi_1(0, \theta) = 0$, 可得 $B_m = 0$ 。所以

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^m P_m(\cos \theta) \quad (2.7.38)$$

对于 Φ_2 来说, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, $\Phi_2 \rightarrow \Phi_0 = -E_0 r \cos \theta$, 可得

$$C_1 = -E_0$$

$$C_m = 0 \quad (m \neq 1)$$

因此

$$\Phi_2(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{m=0}^{\infty} D_m r^{-(m+1)} P_m(\cos \theta) \quad (2.7.39)$$

在介质分界面 $r=a$ 上, 电位 Φ_1 和 Φ_2 满足的边界条件是

$$\Phi_1(a) = \Phi_2(a)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \bigg|_{r=a} = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \bigg|_{r=a}$$

将式 (2.7.38) 和式 (2.7.39) 代入上面的边界条件, 按照同类项系数相等的原则, 得到

$$A_1 a = -E_0 a + D_1 a^{-2}$$

$$\varepsilon A_1 = -\varepsilon E_0 - 2\varepsilon_0 D_1 a^{-3}$$

$$A_m a^m = D_m a^{-(m+1)} \quad (m \neq 1)$$

$$\varepsilon A_m m a^{m-1} = -\varepsilon_0 (m+1) D_m a^{-(m+2)} \quad (m \neq 1)$$

联立以上方程解出:

$$A_1 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} E_0$$

$$D_1 = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} a^3 E_0$$

$$A_m = D_m = 0$$

于是可得球内、外电位解分别为

$$\Phi_1 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 r \cos \theta = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 z \quad (r \leq a)$$

$$\Phi_2 = -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} a^3 E_0 \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad (r \geq a)$$

可见, 球内的电场是与外加电场方向相同的均匀强场, 且小于外电场; 而球外的电场, 在球表面附近, 场线有弯曲, 在远离介质球时, 介质球的影响将消失, 其场分布的截面示意图与图 2-29 类似, 只是介质球对外部电位的影响比介质圆柱弱。

例 2.19 如图 2-31 所示, 半径为 a 的上、下两个导体半球壳, 内、外均为空气。上半球壳电位为 V , 下半球壳电位为 $-V$ 。求球内、外空间的电位分布。

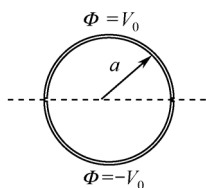


图 2-31 例 2.19 图

解 球内、外的电位满足拉普拉斯方程, 可用式 (2.7.31) 的通解表示。球内包含 $r=0$ 点, 因此 Φ_1 解式中不含 $r^{-(m+1)}$ 项; 球外无穷远处电位趋于零, 因此解式 Φ_2 中不含 r^m 项。于是可写出球内、外电位函数 Φ_1 和 Φ_2 的表达式分别为

$$\Phi_1 = \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^m P_m(\cos \theta)$$

$$\Phi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} D_m r^{-(m+1)} P_m(\cos \theta)$$

在 $r=a$ 的球面上, 将以上电位 Φ_1 和 Φ_2 代入已知边界条件, 并令 $x = \cos \theta$ 可得:

$$\Phi_1 \Big|_{r=a} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m a^m P_m(x) = \begin{cases} V & (x \geq 0) \\ -V & (x \leq 0) \end{cases}$$

显然 $\Phi_1(a)$ 是关于 x 的奇函数, 因此展开成傅里叶—勒让德级数只有奇次项, 即 $m=1, 3, 5, \dots$ 。展开系数

$$\begin{aligned} c_m = A_m a^m &= \frac{2m+1}{2} \left(\int_{-1}^0 -V P_m(x) dx + \int_0^1 V P_m(x) dx \right) \\ &= (2m+1)V \int_0^1 P_m(x) dx \end{aligned}$$

把递推公式 (2.7.35) 代入上式, 可得

$$\begin{aligned} c_m &= V \int_0^1 [P'_{m+1}(x) - P'_{m-1}(x)] dx \\ &= P_{m+1}(1) - P_{m+1}(0) - P_{m-1}(1) + P_{m-1}(0) \end{aligned}$$

利用特殊值, 并注意 $m \pm 1$ 为偶数, 可得

$$\begin{aligned} c_m &= 1 - (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{m!!}{(m+1)!!} - 1 + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m-2)!!}{(m-1)!!} \\ &= (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m-2)!!}{(m+1)!!} (2m+1) \end{aligned}$$

因此可得球内的电位为

$$\Phi_1 = \sum_{m=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m-2)!!}{(m+1)!!} (2m+1) \left(\frac{r}{a}\right)^m P_m(\cos \theta) \quad (r \leq a)$$

类似地, 把 a^m 换成 $a^{-(m+1)}$, 把 r^m 换成 $r^{-(m+1)}$, 可得球外的电位为

$$\Phi_2 = \sum_{m=1,3}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{(m-2)!!}{(m+1)!!} (2m+1) \left(\frac{r}{a}\right)^{-(m+1)} P_m(\cos \theta) \quad (r \geq a)$$

球内、外的电位分布示意图如图 2-32 所示。

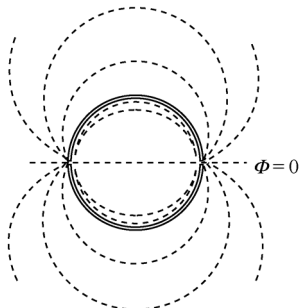


图 2-32 例 2.19 的电位分布

本节思考与练习

2.23 方程 (2.7.3)、(2.7.12) 及 (2.7.22) 中左边每一项均为零时, 所得到的解可称为平凡解, 试分析平凡解所对应的场分布的特点。

2.24 直角坐标分离变量法的关键在于先确定如图 2-20 所示的 (a) 组函数, 即具有两个及以上 (函数值或函数的导数值) 零点的坐标方向上的分离函数。若原边界不具有以上特征该如何解决? 其理论依据是什么? 试分析图 2-33 所示的电极限定的区域中的电位分布并求解。

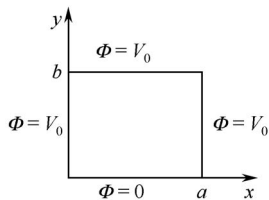


图 2-33 练习题 2.24 图

2.25 二维圆柱坐标和球坐标的分离变量解中都有欧拉方程的解，因此电位随半径增加或减小得非常快。分析例 2.18 中球外的电位，只取 $m=1$ 项的电位，求出其电场强度，分析其特点，由此可得到什么结论？

→ 2.8 镜像法

该节我们继续利用唯一性定理来求解一些特殊边界的边值问题。按照唯一性定理，若两个物理系统在所要求解区域内电位的微分方程相同，边界条件也相同，则它们在该区域电位的解也相同。镜像法和电轴法就是基于这个原理将原物理系统进行再造，但不改变原求解区域的电位方程和边界条件，从而简化求解过程而提出来的。

下面我们举几个具体例子来分别阐述镜像法和电轴法。

2.8.1 平面镜像法

如图 2-34 (a) 所示，无限大接地导体平面上方 $z=h$ 处有一点电荷 q ，求上半空间电位。

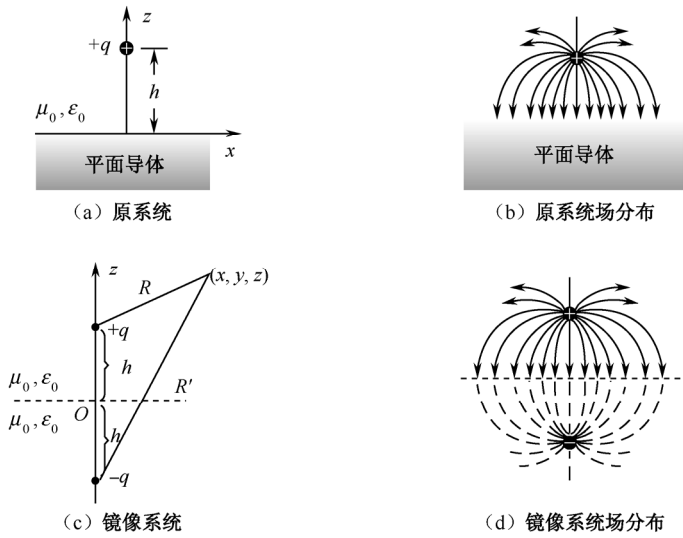


图 2-34 平面镜像法原理图

显然，上半空间的电位由点电荷 q 和 q 在导体表面的感应电荷 ρ_s 共同产生，但 ρ_s 未知，因此，不能用直接积分的方法来求解电场。但如果我们构造一个如图 2-34 (c) 所示的系统，即将导体平面撤去，在 $z=-h$ 处添加电荷 $-q$ ，则易验证，在 $z=0$ 平面， $\Phi=0$ ，与原边界条件相同，而 $z>0$ 空间由于未添加电荷，电位方程也与原方程相同，因此，两系统在 $z>0$ 的空间同解。

像这样为了构造相同边界条件而在求解区域之外添加的辅助电荷，称为**镜像电荷**，

意寓该电荷与原电荷在导体平面（镜）中所成虚像类似。

在镜像系统图 2-34 (c) 中求解上半空间电位显然容易得多，易写出

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R'} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right] \quad (z > 0)\end{aligned}\quad (2.8.1)$$

进而求出导体表面的电荷密度：

$$\rho_s = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{D}|_{z=0} = \epsilon_0 \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{E}|_{z=0} = \epsilon_0 E_z|_{z=0} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{qh}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \quad (2.8.2)$$

以下我们对面电荷密度 ρ_s 进行积分，以便求出导体表面的感应电荷总量。为方便计算，我们改用平面极坐标计算导体表面总电量，根据变换公式

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

以及

$$dS = \rho d\rho d\varphi$$

从而，感应电荷总量为

$$Q_{\text{感应}} = \int \rho_s dS = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{qh\rho d\rho d\varphi}{2\pi(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = \frac{qh}{(\rho^2 + h^2)^{1/2}} \Big|_0^\infty = -q$$

可见，导体表面的感应面电荷总量正好等于镜像电荷。

电位的等位面分布如图 2-35 所示。

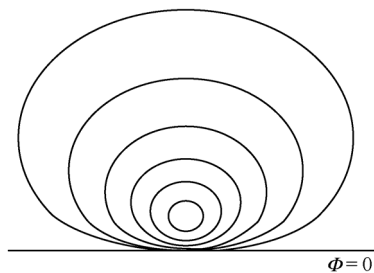
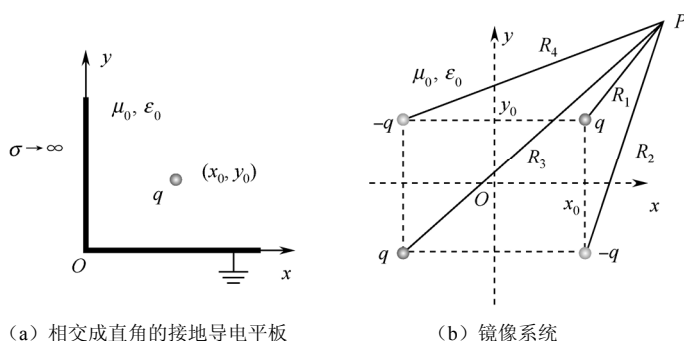


图 2-35 平面导体外的等位面分布

例 2.20 如图 2-36 (a) 所示，两个相交成直角的接地导电平板所形成的角域 1 中有一点电荷 q ，求电荷 q 所受到的作用力。

解 利用镜像法，图 2-36 (a) 所示的镜像系统如图 2-36 (b) 所示。易看出，所求解空间角域 1 中未添加电荷，电位方程与原系统在此区域中的相同；而四个正负相间的点电荷刚好能使 $x=0$ 和 $y=0$ 平面电位为零，与原系统边界条件相同。因此，两系统在角域 1 同解，而在图 2-36 (b) 中求解点电荷 q 的受力将非常便利。



(a) 相交成直角的接地导电平板

(b) 镜像系统

图 2-36 例 2.20 图

由库仑定律和叠加原理可得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{41} \\
 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-a_x \frac{1}{(2x_0)^2} + \frac{a_x 2x_0 + a_y 2y_0}{[(2x_0)^2 + (2y_0)^2]} - a_y \frac{1}{(2y_0)^2} \right) \\
 &= \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left\{ a_x \left[\frac{x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} - \frac{1}{x_0^2} \right] + a_y \left[\frac{y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} - \frac{1}{y_0^2} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

角域内任意一点的电位为

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)$$

其等位面分布如图 2-37 所示。

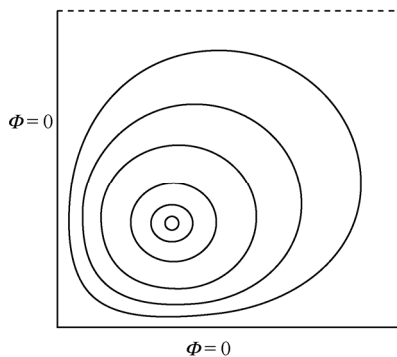


图 2-37 直角导体域内的等位面分布

可以证明, 此类问题中, 若两无限大接地平面间的夹角 α 能被 π 整除, 则导体外侧的电场可用镜像法求解, 镜像电荷与原电荷个数之和为 $2\pi/\alpha$ 个。

例 2.21 如图 2-38 (a) 所示, 位于无限大接地导电平面 ($z=0$) 上方 ($z=h$) 处有一线电荷 λ , 试求上半空间 ($z>0$) 的电位。

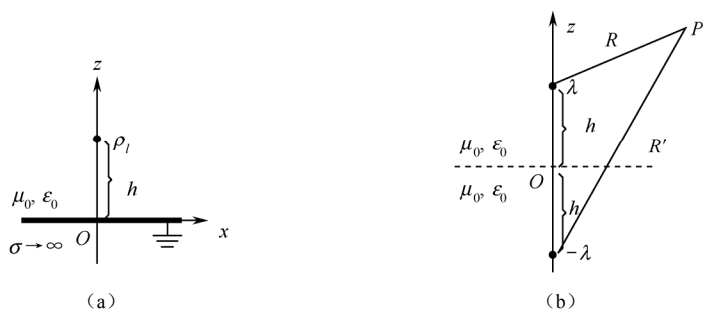


图 2-38 例 2.21 图

解 此问题应用镜像法很容易得到解决。上半空间电位可用图 2-34 (b) 所示的等效镜像线电荷求出。选择 $z=0$ 的平面上的点为电位参考点, 则上半空间的线电荷产生的电位为

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h}{R}$$

而镜像线电荷产生的电位为

$$-\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h}{R'}$$

因此, 上半空间电位为

$$\Phi = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h}{R} - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{h}{R'} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'}{R}$$

其中,

$$R = [x^2 + (y-h)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$R' = [x^2 + (y+h)^2]^{\frac{1}{2}}$$

综上所述, 平面镜像法的特点是 (1) 镜像电荷应在求解区域之外; (2) 镜像电荷的位置与原电荷关于导电平面对称; (3) 镜像电荷与原电荷等值且异号。

若边界面不是导体而是介质, 仍然可以用镜像法来求解, 但要注意 (1) 边界条件是介质分界面上的边界条件, 即式 (2.5.4) 和式 (2.5.8); (2) 镜像电荷等效的是介质分界面上的极化面电荷, 因此, 对界面两侧分别采用镜像法时两个镜像电荷的电荷量是求解的重点。

2.8.2 圆柱面镜像法

半径为 a 的接地导体圆柱外有一与圆柱轴线平行的直线电荷, 单位长度带电量为 ρ_l , 距离圆柱轴线 h ($h > a$), 求圆柱外空间的电位。

与球面镜像类似, 圆柱外的线电荷在圆柱面一侧感应出异性电荷, 其对应的镜像直线电荷应位于轴线与线电荷所构成的平面上并与轴线平行, 且靠近线电荷一侧。设镜

像电荷线密度为 ρ'_l ，位于 $z = h'$ 处，如图 2-39 (a) 所示。该系统的电位参考面是导体圆柱面。

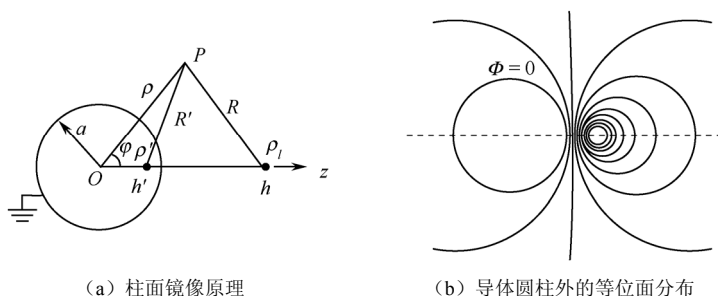


图 2-39 圆柱面镜像法

两个直线电荷在圆柱区域外任意一点的电位可写为

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi + \Phi' = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\rho_l \ln \frac{C_1}{R} + \rho'_l \ln \frac{C_2}{R'} \right) \\ &= \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{C_1}{\sqrt{\rho^2 + h^2 - 2\rho h \cos \varphi}} + \frac{\rho'_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{C_2}{\sqrt{\rho^2 + h'^2 - 2\rho h' \cos \varphi}}\end{aligned}\quad (2.8.3)$$

式中， C_1 、 C_2 是与参考电位面有关的常数。

把边界条件 $\Phi(a) = 0$ 代入式 (2.8.3)，可得

$$\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{C_1}{\sqrt{a^2 + h^2 - 2ah \cos \varphi}} + \frac{\rho'_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{C_2}{\sqrt{a^2 + h'^2 - 2ah' \cos \varphi}} = 0$$

上式成立的条件是

$$\rho'_l = -\rho_l$$

和

$$\frac{C_1}{\sqrt{a^2 + h^2 - 2ah \cos \varphi}} = \frac{C_2}{\sqrt{a^2 + h'^2 - 2ah' \cos \varphi}}$$

若令 $C_1/C_2 = C$ ，则有

$$C \sqrt{a^2 + h'^2 - 2ah' \cos \varphi} = \sqrt{a^2 + h^2 - 2ah \cos \varphi}$$

要对任意 φ 都成立，必有

$$C^2(a^2 + h'^2) = a^2 + h^2$$

及

$$C^2 ah' = ah$$

联立解得合理的一组解为

$$h' = \frac{a^2}{h}, \quad C = \frac{h}{a}$$

于是镜像电荷的线密度和所在位置分别为

$$\rho'_l = -\rho_l, \quad h' = \frac{a^2}{h} \quad (2.8.4)$$

代入式 (2.8.3), 可得圆柱外的电位为

$$\Phi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\rho_l \ln \frac{C_1}{R} - \rho_l \ln \frac{C_2}{R'} \right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \rho_l \ln \frac{CR'}{R} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'h}{Ra} \quad (2.8.5)$$

导体圆柱外电位的等位面分布如图 2-39 (b) 所示。

现在我们能够计算圆柱导体外表面上的感应电荷面密度, 即

$$\rho_s = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=a} = -\frac{\rho_l (h^2 - a^2)}{2\pi a (h^2 + a^2 - 2ah \cos \varphi)}$$

在导体表面单位长度上对感应电荷面密度进行积分, 可得单位长度上圆柱导体外表面上总的感应电荷为

$$\int_s \rho_s dS = -\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} \frac{\rho_l (h^2 - a^2) a d\varphi}{2\pi a (h^2 + a^2 - 2ah \cos \varphi)} = -\rho_l = \rho_l'$$

可见, 单位长度圆柱面上总的感应电荷等于镜像线电荷密度。

单位长度线电荷所受的力

$$\mathbf{f} = \rho_l \mathbf{E}' = -\frac{\rho_l^2 h}{2\pi\epsilon_0 (h^2 - a^2)} \mathbf{a}_z$$

2.8.3 球面镜像法

半径为 a 的接地导体球外有一点电荷 q , 距离球心为 h ($h > a$), 求球外空间的电位。

与平面镜像法类似, 点电荷在球面一侧感应出异性电荷, 该部分电荷与点电荷一起决定球外空间的电场。因此, 镜像电荷应位于球心与点电荷的连线上, 且靠近点电荷一侧。设镜像电荷带电量为 q' , 位于 $z = h'$ 处, 如图 2-40 (a) 所示。 q' 和 h' 的大小应满足边界条件即球面电位为零。为此, 先写出 q 与 q' 在球外产生的电位:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + h'^2 - 2rh' \cos \theta}} \right] (r > a) \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

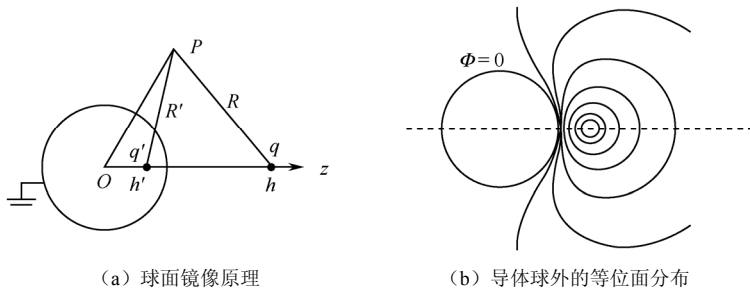


图 2-40 球面镜像法原理图

再写出边界条件:

$$\Phi(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{a^2 + h^2 - 2ah\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{a^2 + h'^2 - 2ah'\cos\theta}} \right] = 0$$

整理得

$$q^2(a^2 + h'^2 - 2ah'\cos\theta) = q'^2(a^2 + h^2 - 2ah\cos\theta)$$

上式对任意 θ 都成立, 因此, 必须有

$$\begin{cases} q^2(a^2 + h'^2) = q'^2(a^2 + h^2) \\ q^2h' = q'^2h \end{cases}$$

解得

$$h' = \frac{a^2}{h}, \quad q' = -\frac{a}{h}q \quad (2.8.7)$$

于是可得球外空间的电位为

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + h^2 - 2rh\cos\theta}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (rh/a)^2 - 2rh\cos\theta}} \right] \quad (r > a) \quad (2.8.8)$$

球外电位的等位面分布如图 2-40 (b) 所示。

根据上述球外电位函数, 可以得到球面上的感应电荷面密度为

$$\rho_s = -\epsilon_0 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -\frac{q}{4\pi} \frac{h^2 - a^2}{a(h^2 + a^2 - 2ah\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

从而, 导体球面上总的感应电荷量是

$$\oint_S \rho_s dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} -\frac{q}{4\pi} \frac{(h^2 - a^2)a^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{a(h^2 + a^2 - 2ah\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{a}{h}q = q'$$

可见, 球面上感应电荷总量等于镜像电荷。

电荷 q 所受的力为

$$F = \frac{q^2 ah}{4\pi\epsilon_0(h^2 - a^2)^2}$$

2.8.4 电轴法

平行双线传输线是两根无限长平行导体圆柱, 设其半径均为 a , 轴线间距离为 D , 两导体单位长度带电量分别为 ρ_l 和 $-\rho_l$, 如图 2-41 所示。求两导体圆柱间单位长度的电容。

当 $D \gg a$ 时, 可认为电荷在导体表面均匀分布, 传输线外的场等于两根导体单独作用时产生的场的叠加, 其解为式 (2.3.15)。当两圆柱导体互相靠近时, 由于邻近效应, 导体表面电荷分布将不再均匀, 直接求解遇到困难。电轴法就是利用镜像原理把导体表面的电荷分布等效成直线电荷 (称为电轴), 使这两个直线电荷与彼此的导体圆柱面互为镜像, 因此镜像电荷与各自所属圆柱单位长度的带电量相等。通过调整两个电轴的位

置, 使其满足边界条件 (两导体表面均为等位面), 即可求出圆柱外的电位。

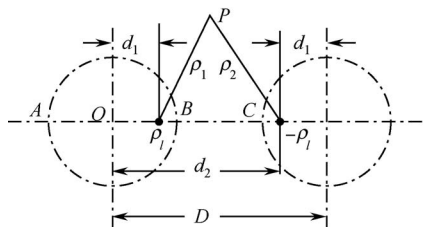


图 2-41 电轴法原理图

利用式 (2.3.15) 的结果, 写出圆柱外的电位为

$$\Phi = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} - \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_0}{\rho_2} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (2.8.9)$$

其中, 零电位参考点取在两圆柱轴线的垂直平分面上。由于边界条件 $\rho_1 = a$ 和 $\rho_2 = a$ 的两圆柱面是等位面, 因此可取两个特殊点来确定电轴的位置, 即图 2-38 中 A、B 两点的电位为

$$\Phi_A = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d_2 + a}{d_1 + a} = \Phi_B = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d_2 - a}{a - d_1} \quad (2.8.10)$$

整理可得

$$d_1 d_2 = a^2 \quad (2.8.11)$$

联立

$$d_1 + d_2 = D \quad (2.8.12)$$

解得

$$d_1 = \frac{D}{2} - \sqrt{\frac{D^2}{4} - a^2} \quad (2.8.13)$$

$$d_2 = \frac{D}{2} + \sqrt{\frac{D^2}{4} - a^2} \quad (2.8.14)$$

两导体间的电压 U 可由 B、C 两点间的电位差来求出

$$U = \Phi_B - \Phi_C = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{d_2 - a}{a - d_1} - \ln \frac{a - d_1}{d_2 - a} \right) = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{(d_2 - a)^2}{(a - d_1)^2} \quad (2.8.15)$$

利用式 (2.8.11), 得到

$$U = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d_2}{d_1} \quad (2.8.16)$$

于是可求出传输线单位长度的电容为

$$C_0 = \frac{\rho_l}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{\frac{D}{2} + \sqrt{\frac{D^2}{4} - a^2}}{\frac{D}{2} - \sqrt{\frac{D^2}{4} - a^2}}} \quad (2.8.17)$$

当 $D \gg a$ 时, $d_1 \rightarrow 0$, $d_2 \rightarrow D$, 则由式 (2.8.10) 计算可得

$$C_0 \approx \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{D}{a}} \quad (2.8.18)$$

本节思考与练习

- 2.26 试分别计算图 2-36 (a) 所示点电荷 q 在直角接地导电平板两个表面的感应电荷量及总感应电量。
- 2.27 两无限大接地导体平板平行放置, 两板之间有一点电荷 q , 请问两板之间的电位能用镜像法求解吗? 为什么?
- 2.28 如图 2-42 所示, 位于无限大接地导体平面 ($z=0$) 上方 ($z=h$) 处有一平行于导电平面的线电荷 ρ_l , 试求上半空间的电位。

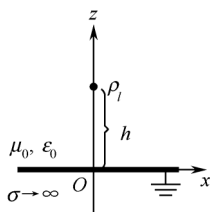


图 2-42

- 2.29 利用接地导体圆柱与圆柱外共轴直线电荷 ρ_l 共同产生的电位式 (2.8.5), 计算导体圆柱表面的感应电荷密度、单位长度的感应电量及直线电荷单位长度所受到的作用力。
- 2.30 利用接地导体球与球外点电荷 q 共同产生的电位式 (2.8.8), 计算导体球表面的感应电荷密度、感应电荷总量及点电荷所受到的作用力。

➔ 2.9 多导体系统及部分电容

2.9.1 电容的概念

两导体间的电容 常用的电容器一般由两个导体构成一个独立系统, 两导体之间的电压为 U 时, 两导体分别带等值异号电荷 $+Q$ 和 $-Q$, 且 Q 与 U 成正比, 其比值为

$$C = \frac{Q}{U} \quad (2.9.1)$$

定义为两导体的电容, 它的大小取决于两导体的形状、尺寸以及两导体间介质的性质, 而与它是否带电及带电量多少无关。

例如面积为 S , 间距为 d 的平板电容为 $\varepsilon_0 S/d$; 半径为 a , 轴间距为 D 的平行双传输线间单位长度的电容约为 $\pi\varepsilon_0 / \ln \frac{D}{a}$ 。

孤立导体的电容 孤立导体的电容可看做导体与无穷远大地(零电位)之间的电容, 表示为

$$C = \frac{Q}{\Phi} \quad (2.9.2)$$

例如半径为 a 的导体球对无穷远大地的电容为 $4\pi\varepsilon_0 a^2$ 。

例 2.22 半径为 R 的长直圆柱导体平行于地面, 轴线与地间距离为 h , 如图 2-43 所示。求单位长度的电容。

解 考虑到地面感应电荷对圆柱导体外电场的影响, 本题实际要求的是单位长度圆柱导体与地面之间的电容。

先用镜像法在与地面对称的位置画出圆柱导体的位置, 如图 2-44 所示。再用电轴法确定等效电轴的位置, 对照图 2-37 及式 (2.8.9)、式 (2.8.10), 有

$$b = \sqrt{h^2 - R^2}$$

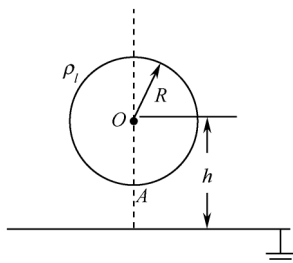


图 2-43 例 2.22 图

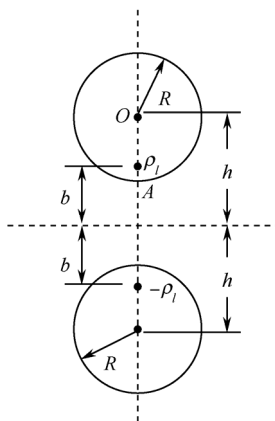


图 2-44 镜像系统

然后用叠加原理求出两直线电荷在圆柱表面 A 点产生的对地电位 [参见式 (2.8.4)] 为

$$\Phi_A = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b + (h - R)}{b - (h - R)}$$

最后得出单位长度圆柱导体对地的电容为

$$C_0 = \frac{\rho_l}{\Phi_A} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{b + (h - R)}{b - (h - R)}} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{\sqrt{h+R} + \sqrt{h-R}}{\sqrt{h+R} - \sqrt{h-R}}}$$

当 $h \gg R$ 时, $b \approx h$, 有

$$C_0 \approx \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h}{R}}$$

对比式 (2.8.13) 可知, 单位长度单根圆柱导体对地的电容是平行双线间单位长度电容的两倍。

2.9.2 多导体系统间的部分电容

三个及三个以上的导体构成多导体系统。多导体系统中若其中一个导体是大地, 则静电平衡时该系统所有导体表面的电荷总量为零, 而每个导体上的电位 (大地除外) 和电荷分布取决于导体间的介质、导体的形状尺寸及相对位置。

设线性介质 ϵ 中有 n 个导体, 另设大地为第 $n+1$ 个导体, 标号为 “0”; n 个导体的带电量分别为 q_1, q_2, \dots, q_n ; 电位分别为 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$; 则每个导体上的电位应等于各个导体上的电荷单独存在时所产生的电位的叠加, 即

$$\begin{cases} \Phi_1 = p_{10}q_1 + p_{12}q_2 + \dots + p_{1n}q_n \\ \Phi_2 = p_{21}q_1 + p_{20}q_2 + \dots + p_{2n}q_n \\ \vdots \\ \Phi_n = p_{n1}q_1 + p_{n2}q_2 + \dots + p_{n0}q_n \end{cases} \quad (2.9.3)$$

通过求解, 该方程组可表示为

$$\begin{cases} q_1 = \beta_{10}\Phi_1 + \beta_{12}\Phi_2 + \dots + \beta_{1n}\Phi_n \\ q_2 = \beta_{21}\Phi_1 + \beta_{20}\Phi_2 + \dots + \beta_{2n}\Phi_n \\ \vdots \\ q_n = \beta_{n1}\Phi_1 + \beta_{n2}\Phi_2 + \dots + \beta_{n0}\Phi_n \end{cases} \quad (2.9.4)$$

也可写成

$$\begin{cases} q_1 = C_{10}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) + \dots + C_{1n}(\Phi_1 - \Phi_n) \\ q_2 = C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{20}\Phi_2 + \dots + C_{2n}(\Phi_2 - \Phi_n) \\ \vdots \\ q_n = C_{n1}(\Phi_n - \Phi_1) + C_{n2}(\Phi_n - \Phi_2) + \dots + C_{n0}\Phi_n \end{cases} \quad (2.9.5)$$

或

$$\begin{cases} q_1 = C_{10}U_{10} + C_{12}U_{12} + \dots + C_{1n}U_{1n} \\ q_2 = C_{21}U_{21} + C_{20}U_{20} + \dots + C_{2n}U_{2n} \\ \vdots \\ q_n = C_{n1}U_{n1} + C_{n2}U_{n2} + \dots + C_{n0}U_{n0} \end{cases} \quad (2.9.6)$$

该式表明任一导体上的电量由 n 部分电量构成。将这些部分电量与式 (2.9.1) 和式 (2.9.2) 对比, 可看出 C_{i0} ($i=1, 2, \dots, n$) 为导体 i 对地的电容, 称为**自有部分电容**; C_{ij} 为导体 i 对导体 j 的电容, 且有 $C_{ij}=C_{ji}$, 称为**互有部分电容**。它们的大小取决于系统内所有导体的几何尺寸、相对位置及导体间介质的性质。

另外,在多导体静电独立系统中,有时会用到两导体间等效电容的概念。任意两导体间的等效电容是指从这两导体看进去的入端等效电容,与电路理论中二端口网络的输入电容或等效电容意义相同。

部分电容的意义在于:

(1) 揭示了电容概念的本质。不只是电容器才具有电容,任何导体与地、导体与导体之间都可能存在电容。而消除两导体间电容的唯一方法是采用静电屏蔽措施,用屏蔽导体包围所要屏蔽的区域,且屏蔽导体接地。

(2) 利用部分电容的概念可以把“场”的问题转化为“路”的问题来简化分析和计算。

例 2.23 试计算考虑大地影响时,平行双线传输线间的等效电容。已知 $d \gg a$, $a = h$, 如图 2-45 (a) 所示。

解 双线传输线的电容网络如图 2-45 (b) 所示, 由对称性知

$$C_{10} = C_{20}, \quad C_{12} = C_{21}$$

因此,从传输线两端看进去的等效电容为

$$C_p = C_{12} + \frac{C_{10}C_{20}}{C_{10} + C_{20}} = C_{12} + \frac{C_{10}}{2} \quad (2.9.7)$$

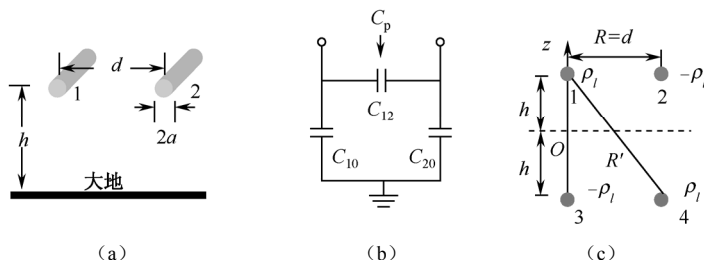


图 2-45 地上架空双线传输线

设两线单位长度带电量分别为 ρ_l 和 $-\rho_l$, 由式 (2.9.5) 写出

$$\rho_l = C_{10}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) \quad (2.9.8)$$

其中, Φ_1 和 Φ_2 的计算应考虑大地的影响, 在其镜像系统图 2-45 (c) 中, 利用叠加原理来求解。由式 (2.8.3) 平行双线外电位的表达式, 可写出导体 1、3 和导体 2、4 在导体 1 上的电位约为

$$\Phi_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{a} + \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{4h^2 + d^2}}{d} = -\Phi_2 \quad (2.9.9)$$

式中, 利用 $d \gg a$ 和 $a = h$ 在计算导体间距离时做了近似。代入式 (2.9.8), 可得

$$\frac{\rho_l}{\Phi_1} = C_{10} + 2C_{12}$$

于是从平行双线两端看进去的单位长度的等效电容为

$$C_p = C_{12} + \frac{C_{10}}{2} = \frac{\rho_l}{2\Phi_1} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{2h\sqrt{4h^2 + d^2}}{ad}}$$

本节思考与练习

- 2.31 试由式 (2.9.6) 设计出测量多导体系统中部分电容的方法 (以 4 导体为例)。
 2.32 结构对称的三相电缆外包皮接地, 如图 2-46 所示, 试利用部分电容的概念画出求解任意两芯间等效电容的电路图。
 2.33 屏蔽电缆如图 2-47 所示, 测得 1、2 导体间的电容为 $0.020 \mu\text{F}$; 1、2 导体相连与铅皮间的电容为 $0.034 \mu\text{F}$, 求各部分电容 (C_{10} 、 C_{20} 、 C_{12})。

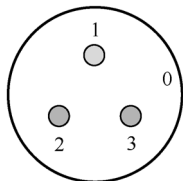


图 2-46 三芯电缆

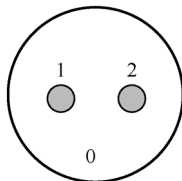


图 2-47 屏蔽电缆

- 2.34 试把地球看成一个半径为 $6.37 \times 10^6 \text{ m}$ 的导体球, 计算地球的电容是几法拉?

2.10 静电场能量及静电力

电场最基本的特征是对电荷有作用力, 使电荷产生位移而做功, 因此电场具有能量, 且这种静电能存在于有电场强度分布的全部空间。

2.10.1 静电场能量

静电能量是在静电场建立的过程中, 外源做功转化而来的。若将静电场建立的过程充分理想化, 假使没有任何多余的功, 当电场建立完成后, 外源所做功将全部转化为静电能储存起来。

假设体积 τ 中电荷的初始分布为 0; 电位为 0; 最终电荷分布为 ρ ; 对应的电位为 Φ ; 建立过程中任意时刻电荷分布为 $\alpha\rho$; 对应的电位为 $\alpha\Phi$, 其中 $\alpha \in [0, 1]$; 则当电位为 $\alpha\Phi$ 时, $d\tau$ 体积内将增量电荷

$$dq = d(\alpha\rho)d\tau = \rho d\alpha d\tau$$

从无穷远处移到场点外源所做的功为

$$dW = dq(\alpha\Phi) = \rho\Phi d\alpha d\tau$$

这部分功全部转化为静电能时, 整个体积 τ 中增加的静电能为

$$dW_e = \int_{\tau} dW = \int_{\tau} \rho \Phi d\alpha d\tau$$

当电场建立完成后, 整个系统增加的静电能为

$$W_e = \int dW_e = \int_{\tau} \int_0^1 \rho \Phi \alpha d\alpha d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \Phi d\tau \quad (2.10.1)$$

类似地, N 个导体系统的静电能为

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi_i \int_{S_i} \rho_S dS_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi_i q_i \quad (2.10.2)$$

当 $N=2$ 时, 即为电容器情形, 由上式可得

$$W_e = \frac{1}{2} q(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{q^2}{2U} \quad (2.10.3)$$

式 (2.10.1) 和式 (2.10.2) 给出了静电系统总能量的计算式, 下面, 我们用场矢量来推导静电能的另一表达式, 并引出能量密度的概念。将 $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$ 代入式 (2.10.1) 中, 得

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\tau} (\nabla \cdot \mathbf{D}) \Phi d\tau \quad (2.10.4)$$

再利用矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{D}) = \Phi \nabla \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \nabla \Phi$$

式 (2.10.4) 可写为

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \nabla \cdot (\Phi \mathbf{D}) d\tau - \frac{1}{2} \int_{\tau} (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{D} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \oint_S \Phi \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau \end{aligned}$$

上式中的积分限可扩大至无穷远, 并不会影响积分结果, 而这时有限区域中分布的电荷与无穷大包面 S 间的距离 $R \rightarrow \infty$ 。由于 $\Phi \propto \frac{1}{R}$, $\mathbf{D} \propto \frac{1}{R^2}$, $S \propto R^2$, 因此上式中的面积分将趋于零。于是得到用场矢量表示的静电能为

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau \quad (2.10.5)$$

该表达式进一步表明静电能存在于 \mathbf{E} 的全部空间, 并可定义单位体积的静电能为**能量密度**:

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \quad (2.10.6)$$

例 2.24 空中半径为 R 的球形区域中均匀分布密度为 ρ_0 的电荷, 计算其静电能。

解 本题中我们分别利用式 (2.10.1) 和式 (2.10.5) 来计算该系统的静电能。

$$r \geq R, \quad \mathbf{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_r \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \mathbf{a}_r \frac{R^3 \rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \int_r^\infty \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{r} = \frac{R_3 \rho_0}{3\epsilon_0 r} \\ r \leq R, \quad \mathbf{E}_2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_r \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \mathbf{a}_r \frac{r \rho_0}{3\epsilon_0} \\ \Phi_2 &= \int_r^R \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{r} + \Phi_1(R) = \frac{r^2 \rho_0}{6\epsilon_0} \Big|_r^R + \frac{R^2 \rho_0}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)\end{aligned}$$

由式 (2.10.1)

$$W_e = \frac{1}{2} \int_\tau \rho_0 \Phi_2 d\tau = \int_0^R \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0^2}{15\epsilon_0} R^5$$

由式 (2.10.5)

$$\begin{aligned}W_e &= \frac{1}{2} \int_\tau \epsilon_0 \mathbf{E}^2 d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau_1} \epsilon_0 \mathbf{E}_1^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau_2} \epsilon_0 \mathbf{E}_2^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^R \left(\frac{r \rho_0}{3\epsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_R^\infty \left(\frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{4\pi\rho_0^2}{15\epsilon_0} R^5\end{aligned}$$

可见, 两种计算结果是一样的。

2.10.2 静电力

如前所述, 在静电系统中, 静电力 (或外力) 做功将导致系统能量变化, 那么可以推测静电能变化的趋势也可反映静电力做功的趋势。因此, 除库仑定律可计算静电力之外, 我们提出一种利用静电能的空间变化率来计算静电力的方法, 称为**虚位移法**。

设静电系统由 N 个位置固定的导体组成, 假使其中导体 i 沿 \mathbf{l} 方向虚位移 $\Delta \mathbf{l}$ 距离, 而其余导体不动, 则整个系统静电能的增量 ΔW_e 与电场力所做的功 $\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{l} = F_l \Delta l$ 之间的关系可分下面两种情况来讨论:

(1) 各导体上的带电量 q_i 不变, 即系统中各导体均没有外接电源, 不会有外源供给。按照能量守恒定律, 电场力所做机械功应来源于系统能量的减少, 因此有

$$F_l \Delta l = -\Delta W_e$$

于是

$$F_l = - \frac{dW_e}{dl} \Big|_{q=\text{const}} \quad (2.10.7)$$

(2) 各导体上的电位不变, 即各导体均连接恒定电源, 以保持电位不变。在这种情况下, 由于导体 i 的位移会改变系统中的各部分电容, 从而使各导体上的带电量发生变化, 因而电源将做功, 即

$$\Delta W = \sum_{i=1}^N \Phi_i \Delta q_i$$

而各导体上的电量变化导致的系统静电能的增量,按照式(2.9.2)应为

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi_i \Delta q_i$$

可见,电源输送给系统的能量有一半做了机械功,另一半增加了系统的储能,故有

$$F_l \Delta l = \Delta W - \Delta W_e = \Delta W_e$$

$$F_l = \left. \frac{dW_e}{dl} \right|_{\Phi=\text{const}} \quad (2.10.8)$$

两种假设下的计算结果是完全相同的。

式(2.10.7)和式(2.10.8)表明带电体沿 \mathbf{l} 方向所受到的静电力是静电场能量在此方向的方向导数。因此,静电力的一般表达式可用静电能的梯度表示,即

$$\mathbf{F} = -\nabla W_e \Big|_{q=\text{const}} \quad (2.10.9)$$

$$\mathbf{F} = \nabla W_e \Big|_{\Phi=\text{const}} \quad (2.10.10)$$

例 2.25 一个半径为 a 带电 Q 的孤立导体球被切成相等的两半,求这两半之间的作用力。

解 导体球切开后仍是等位体,电荷仍均匀分布在球表面。该带电系统的总能量为

$$W_e = \frac{1}{2} Q \Phi(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_{r=a}$$

球表面面元 dS_r 所受的静电力为

$$d\mathbf{F} = -\nabla W_e \frac{dS_r}{S} = -\mathbf{a}_r \frac{\partial W_e}{\partial r} \Big|_{r=a} \frac{1}{4\pi a^2} dS_r = \mathbf{a}_r \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^4} dS_r$$

设导体球切面为 $z=0$ 平面,则上半球面所受的合力为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{上}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{a}_r \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^4} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathbf{a}_z \cos\theta + \mathbf{a}_\rho \sin\theta) \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^2} \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{a}_z \frac{Q^2}{16\pi \epsilon_0 a^2} \sin\theta \cos\theta d\theta = \mathbf{a}_z \frac{Q^2}{32\pi \epsilon_0 a^2} \end{aligned}$$

下半球面所受的合力为

$$\mathbf{F}_{\text{下}} = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathbf{a}_r \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 a^4} a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = -\mathbf{a}_z \frac{Q^2}{32\pi \epsilon_0 a^2}$$

例 2.26 如图 2-48 所示平板电容器中填充了一部分介质,忽略边缘效应,求介质所受静电力。

解 该电容器中的总储能为

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2 (l-x)wd + \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{U}{d} \right)^2 xwd$$

假设极板电压不变,, 则依式 (2.10.10), 有

$$\mathbf{F} = \nabla W_e = \mathbf{a}_x \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \left(\frac{U}{d} \right)^2 wd$$

由于式中 $\varepsilon > \varepsilon_0$, 表明静电力 \mathbf{F} 沿 x 轴正方向, 即介质将被吸入电容器。

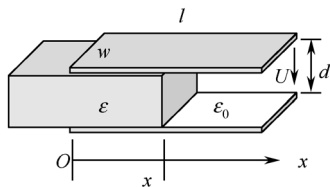


图 2-48 例 2.26 图

本节思考与练习

- 2.35 试举例证明让一个不带电的导体或介质进入静电场中, 总是使场的能量减小。
 2.36 求面电荷密度为 ρ_s 的导体表面单位面积所受到的静电力。
 2.37 试用库仑定律的原理定性分析例 2.26 中介质片所受静电力的方向。

➔ 2.11 静电场的 MATLAB 运算和仿真

MATLAB 强大的计算能力和绘图能力在本章得到了很好的展示。

一、静电场的数值积分运算 quad

MATLAB 软件中提供了 5 个数值积分函数, 分别是 quad (一元函数的数值积分, 采用自适应 Simpson 方法)、quadl (一元函数的数值积分, 采用自适应 Lobatto 方法)、quadv (一元函数的矢量数值积分)、dblquad (二重积分) 和 triplequad (三重积分)。

(1) 计算 $q = \int_a^b f(x)dx$, 基本调用格式为

$$q = \text{quad}(\text{fun}, a, b, \text{tol}, \text{trace})$$

其中, fun 为函数句柄; a 和 b 是标量, 分别是积分下限和积分上限; tol 是绝对积分容限, 不填写时 MATLAB7.0 自动默认为 10^{-6} ; trace 用来跟踪数据, 不填写或填 0 时不显示, 填非零值时显示计算定积分的迭代过程中向量 [fcnt a b-a Q] 的值, fcnt 是计算定积分过程中计算函数值的次数。quadl 与 quad 调用格式相同。quadv 用来计算一元函数中含有向量的数值积分, 相当于多个一元定积分, 输出也是向量, 每个元素是一个一元函数定积分的值。

(2) 计算二重积分 $Q = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x, y) dx dy$, 基本调用格式为

$$q = \text{quad}(\text{fun}, x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}, \text{tol}, \text{method})$$

其中, method 指定计算一维积分时采用的函数, 不填时默认采用 quad() 来计算, 若选用 quadl, 可设 method=@quadl。

三重积分 $Q = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x, y, z) dx dy dz$ 用 triplequad() 实现, 调用方法与二重积分类似。

例 2.27 线密度为 ρ_l 的带电直线长度为 l , 求 (ρ_0, z_0) 点的电位。

解 取无穷远为零参考, 线电荷的电位解为

$$\Phi = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + (z - z_0)^2}} dz$$

为简单, 取 $\frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} = 1$, $l = 2$, 计算点 $(1.5, 1.2)$ 的电位。

代码如下。

```
%计算线电荷的电位
r0=1.5;z0=1.2; %场点坐标
U=@(z)1./sqrt(r0^2+(z-z0).^2); %场点电位的被积函数
quad(U,-1,1,2e-6,1) %求积分, %跟踪数据
运行结果为
```

9	-1.0000000000	5.43160000e-001	0.2227189962
11	-0.4568400000	9.13680000e-001	0.4762815973
13	-0.4568400000	4.56840000e-001	0.2207425830
15	0.0000000000	4.56840000e-001	0.2555387416
17	0.4568400000	5.43160000e-001	0.3441881481

```
ans =
```

1.0432

二、边值问题的电位分布

静电场中的分离变量法得到的解析解往往是级数形式, 利用 MATLAB 的绘图工具可以直观地呈现场分布的特征。常用的函数绘图指令有 plot3 (三维线形图)、mesh (网格图)、meshc (网格图叠加等值线图)、surf (表面图)、surfc (曲面图叠加等值线图)、isosurface (等表面提取器)、slice (体积切片图)、stream3 (三维流线图) 及 quiver3 (三维矢量图) 等, 更多的指令函数请查阅 MATLAB 手册。调用格式基本相同。

例 2.28 例题 2.12 中长方体内的电位解为

$$\Phi = \frac{16V}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2m-1)\pi x}{a} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{b}}{(2m-1)(2n-1)} \frac{\sinh \left[\sqrt{\left(\frac{2m-1}{a} \pi \right)^2 + \left(\frac{2n-1}{b} \pi \right)^2} z \right]}{\sinh \left[\sqrt{\left(\frac{2m-1}{a} \pi \right)^2 + \left(\frac{2n-1}{b} \pi \right)^2} c \right]}$$

画出长方体内的等电位面。

解 设 $V=10$, $a=5$, $b=5$, $c=3$

代码如下

```
%长方体金属箱中的电位
V=10;a=5;b=5;c=3;                                %设定长方体参数
x=0:0.1:5;y=0:0.1:5;z=0:0.1:3;
[x,y,z]=meshgrid(x,y,z);                          %建立网格
f=0;
for m=1:15                                          %以下6句为求和运算
for n=1:15
j=16*V/pi/pi*sin((2*m-1)*pi*x/a).*sin((2*n-1)*pi*y/b).*sinh(sqrt(((2*m-1)*pi/a).^2+((2*n-1)*pi/b).^2).*z)/sinh(sqrt(((2*m-1)*pi/a).^2+((2*n-1)*pi/b).^2).*c)/(2*m-1)/(2*n-1);
f=f+j;
end
end
isosurface(x,y,z,f,1);                            %画出等位面
xlabel('x')                                         %标出x坐标轴
ylabel('y')                                         %标出y坐标轴
zlabel('z')                                         %标出z坐标轴
```

所画出的等电位面分别如图 2-49 和图 2-50 所示。

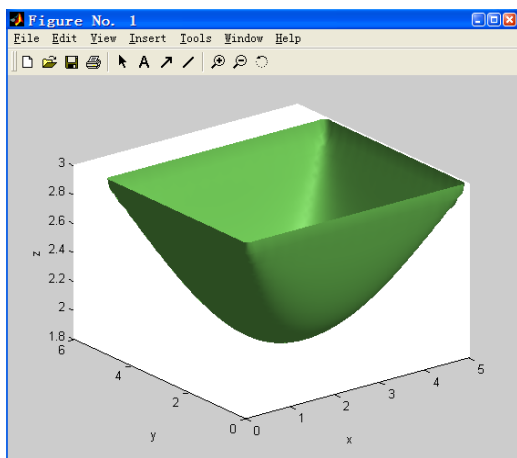


图 2-49 $\Phi=1$ 的等位面

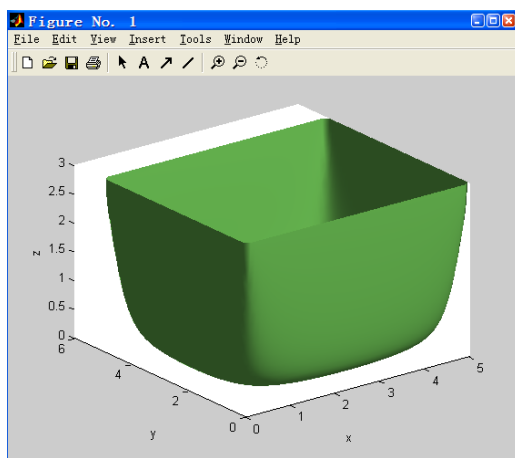


图 2-50 $\Phi=0.1$ 的等位面

例 2.29 例题 2.17 中处于匀强场中的介质圆柱内外的电位为

$$\Phi_1 = -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0 x \quad (\rho \leq a)$$

$$\Phi_2 = -E_0 x + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{a^2 E_0 x}{x^2 + y^2} \quad (\rho > a)$$

画出等位线分布图。

解 设 $E_0=1$, $a=1$, $\varepsilon_{r1}=4$, $\varepsilon_{r2}=1$

代码如下。

```
%匀强场中的介质圆柱
[x,y]=meshgrid(-3:.01:3, -3:.01:3); %建立网格
e1=4;e2=1;a=1; %设定参数
f1=-2*e2/(e1+e2)*x; %计算电位 $\phi_1$ 
u1=f1.*(sqrt(x.^2+y.^2)<=1); %把电位 $\phi_1$ 限制在圆柱内
f2=-x+(e1-e2)/(e1+e2)*a^2*x./((x+eps).^2+(y+eps).^2); %计算电位 $\phi_2$ 
u2=f2.*(sqrt(x.^2+y.^2)>=1); %把电位 $\phi_2$ 限制在圆柱外
contour(x,y,u1,[-0.4:2:0.4]); %画出圆柱内电位分别为-0.4、-0.2、0、0.2、0.4的等位线
hold on %图形保持
contour(x,y,u2,[-2.6:2:2.6]); %画出圆柱外的等位线
hold on %图形保持
xlabel('x') %标出x坐标轴
ylabel('y') %标出y坐标轴
ezplot('x^2+y^2-1',[-3,3,-3,3]) %画圆
```

所画出的等位线分别如图 2-51 和图 2-52 所示。

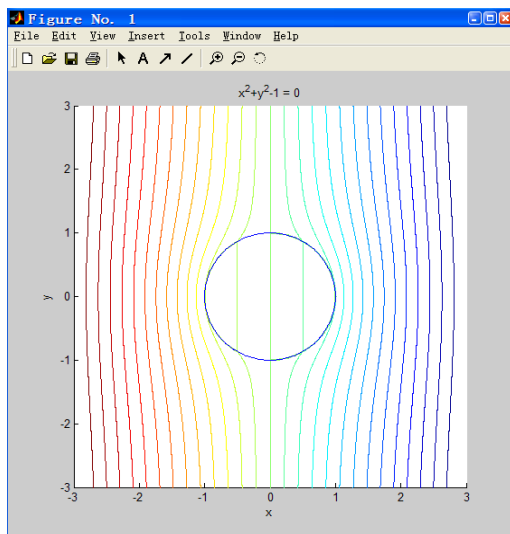


图 2-51 $\varepsilon_{r1} = 4, \varepsilon_{r2} = 1$ 时的等位线

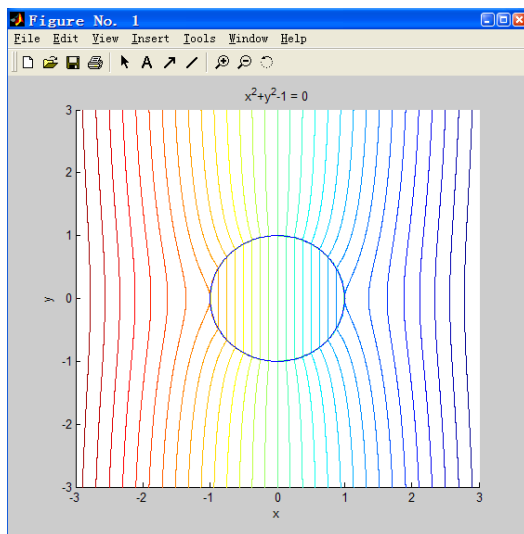


图 2-52 $\varepsilon_{r1} = 1, \varepsilon_{r2} = 4$ 时的等位线

例 2.30 绘出电偶极子的电位函数分布图。

解 电偶极子的电位为

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

在 x - y 平面内, 设正电荷位于 $(0,1)$ 点, 负电荷位于 $(0,-1)$ 点, 为简单起见,

设 $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} = 1$, 则

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

代码如下。

```
%电偶极子电位
[x,y]=meshgrid(-2:0.1:2,-5:0.1:5);           %建立网格
A=1./sqrt(x.^2+(y+1).^2)-1./sqrt(x.^2+(y-1).^2); %计算电位
surf(x,y,A)                                     %画出电位的着色图及等线图
xlabel('x')                                     %标出 x 坐标轴
ylabel('y')                                     %标出 y 坐标轴
```

所绘出的电位函数分布图分别如图 2-53 和图 2-54 所示。

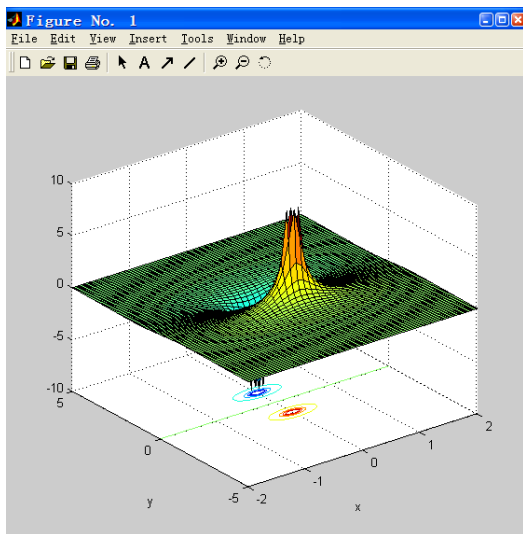


图 2-53 偶极子电位函数分布图

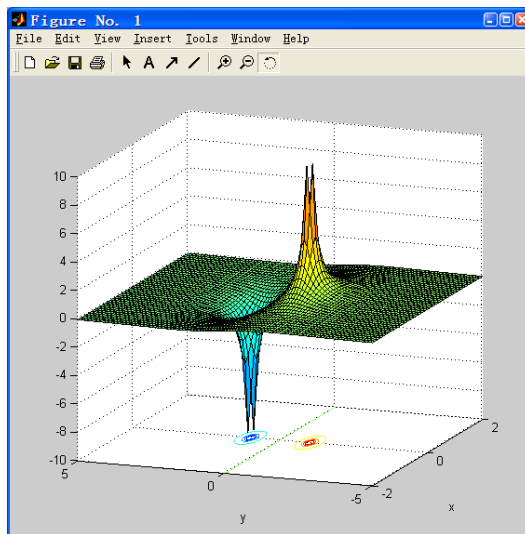


图 2-54 偶极子电位函数分布图（经旋转）

电偶极子的等位面如图 2-55 所示，代码请读者自己编写。

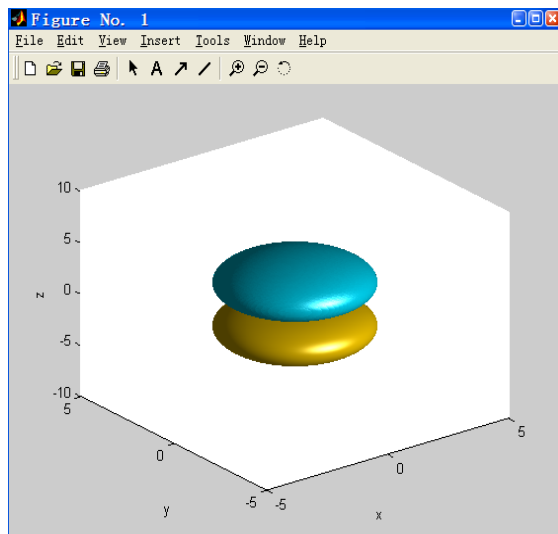


图 2-55 电偶极子的等位面

例 2.31 求距离为 d 线密度分别为 ρ_l 和 $-\rho_l$ 的无限长带电平行双线的电位分布。

解 平行双线传输线的电位为

$$\Phi = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

为简单, 设 $\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} = 1$, 并设 $d=2$, 即正负线电荷分别位于 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$, 则在直角坐标系中, 电位可写为

$$\Phi = \ln \sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

代码如下。

```
%平行双线电位
[x,y]=meshgrid(-3:0.1:3, -3:0.1:3); %建立网格
f=log (sqrt((x+1).^2+y.^2+eps))- log (sqrt((x-1).^2+y.^2+eps)); %计算电位
v=[-17,-1.5,-1,-.5,-.2,0,.2,.5,1,1.5,17]; %指定电位数值的向量
[C,h]=contour(x,y,f,v, 'b'); %画出等位线, 线条用蓝色
clabel(C) %标出等位线数值
xlabel('x') %标出 x 轴
ylabel('y') %标出 y 轴
```

所绘出的等位线图如图 2-56 所示。

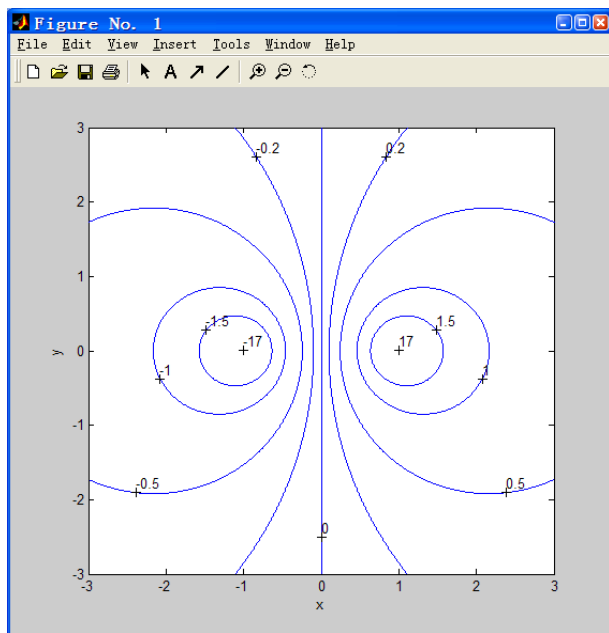


图 2-56 平行双线的等位线图

```
%平行双线电场
[x,y]=meshgrid(-3:.25:3, -3:.25:3); %建立网格
f=log (sqrt((x+1).^2+y.^2+eps))- log (sqrt((x-1).^2+y.^2+eps)); %计算电位
[C,h]=contour(x,y,f,[-17,-1.5,-1,-.5,-.2,0,.2,.5,1,1.5,17], 'r'); %画出等位线, 线条用红色
```

```
hold on                                     %图形保持
[dx,dy]=gradient(-f,25,25);               %计算电场强度
D=sqrt(dx.^2+dy.^2);dx=dx./D;dy=dy./D;    %把电场分量归一化
quiver(x,y,dx,dy,7);                      %画出电场矢量图，箭头比例为 0.7
xlabel('x')                                %标出 x 轴
ylabel('y')                                %标出 y 轴
```

所得到的电位分布如图 2-57 所示。

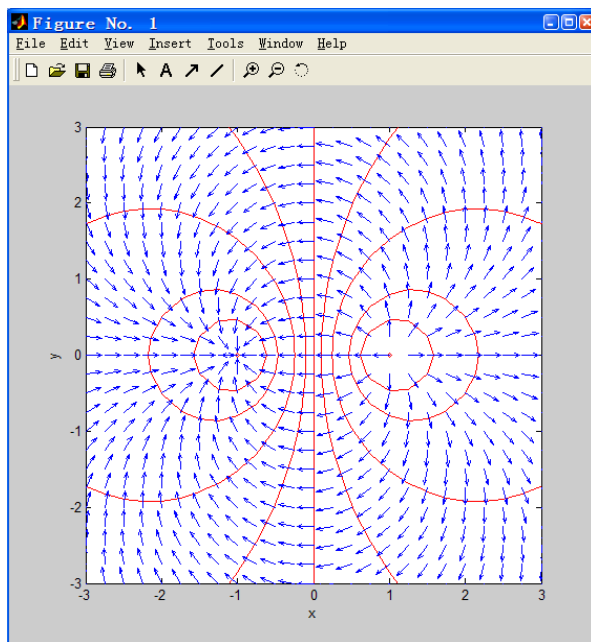


图 2-57 平行双线的电位分布和归一化电场分布

本节思考与练习

2.38 面密度为 ρ_s 的带电圆盘，半径为 a ，求轴线上某一点的电位。参数自设，用 MATLAB 计算。

2.39 电场中有一半径为 a 的圆柱体，已知圆柱内外的电位分布为

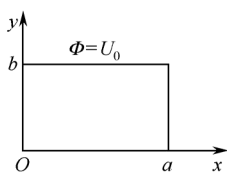
$$\Phi = 0 \quad (\rho \leq a)$$

$$\Phi = A \left(\rho - \frac{a^2}{\rho} \right) \cos \varphi \quad (\rho \geq a)$$

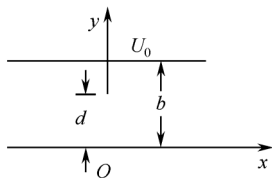
用 MATLAB 画出等电位分布图。

2.40 如练习题 2.41 图所示，有一长方形的导体槽，设槽的长度为无限长，电位为 0，槽上有一块与槽绝缘的盖板，电位为 U_0 ，求槽内的电位分布，并用 MATLAB 画出电位分布图和电场强度矢量图。

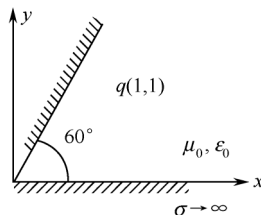
- 2.41 如练习题 2.42 图所示, 两无限大平行导体平面, 相距为 b , 在 $x=0$ 平面上 $d \leq y \leq b$ 处有一厚度可视为零导体薄片与上极板相连, 整个 T 型板的电位为 U_0 , 下极板电位为 0。若已知 $x=0$ 平面上 $0 \leq y \leq d$ 范围内的电位为 $\Phi = U_0 y / d$, 求板间的电位分布, 并用 MATLAB 画出电位分布图。
- 2.42 一点电荷 q 放在 60° 的接地导体角域内的 $x=1, y=1$ 点, 如练习题 2.43 图所示。求角域内点的电位, 并画出等位线分布图。



练习题 2.40 图



练习题 2.41 图



练习题 2.42 图

本章小结

一、静电场的研究方法:

先从实验定律——库仑定律

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} \mathbf{a}_{R_{12}} = \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

出发, 引出场的概念及描述场的物理量——电场强度 \mathbf{E} 及其在各种电荷分布下的计算式。

$$N \text{ 个点电荷: } \mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{R_i} \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^2} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i$$

$$\text{体电荷: } \mathbf{E} = \int_{\tau} \mathbf{a}_R \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 R^2} d\tau'$$

$$\text{面电荷: } \mathbf{E} = \int_S \mathbf{a}_R \frac{\rho_s(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 R^2} dS'$$

$$\text{线电荷: } \mathbf{E} = \int_l \mathbf{a}_R \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 R^2} dl'$$

然后按照亥姆霍兹定理研究静电场的散度和旋度, 得出静电场的基本方程为

积分形式:

微分形式:

本构关系:

$$\begin{cases} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q \\ \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$$

再利用基本方程的积分形式推导出两种不同介质分界面上的边界条件:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)|_S = \rho_s$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)|_S = 0$$

及导体表面的边界条件:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}|_S = \rho_s$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_S = 0$$

从而完成求解矢量场的必备理论: 基本方程+边界条件。

二、求解静电场的方法

(1) 直接积分法: 已知体、面、线电荷分布, 利用积分公式直接计算;

(2) 高斯定律法: 电荷分布具有对称性时, 场分布也具有对称性, 通过适当选取高斯面, 可使高斯面上的场量为常数, 从而求出场矢量;

(3) 电位直接积分法: 由电场的无旋性可引出电位, 先求电位, 再求电场。

微分关系

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \Phi(\mathbf{r})$$

积分关系

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_r^{\text{参考点}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

电位的直接积分公式:

$$N \text{ 个点电荷} \quad \Phi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_i} \quad (R_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|)$$

体电荷

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\rho_v(\mathbf{r}')}{R} d\tau' + C$$

面电荷

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\rho_s(\mathbf{r}')}{R} dS' + C$$

线电荷

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{l'} \frac{\rho_l(\mathbf{r}')}{R} dl' + C$$

(4) 求解电位方程法: 在线性均匀的各向同性介质中电位满足

泊松方程

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

或拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

与边界条件

$$-\epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Big|_S + \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \Big|_S = \rho_s$$

$$\Phi_1|_S = \Phi_2|_S$$

一起构成边值问题。

分离变量法是求解拉普拉斯方程的重要方法, 二维和三维解一般是级数形式。

在直角坐标系中, 分离常数应满足

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

以 $X(x)$ 的解为例: 当 k_x 为实数时, $X(x)$ 的解为

$$X(x) = A_1 \sin k_x x + B_1 \cos k_x x$$

当 k_x 为虚数时, 即 $k_x = j\alpha_x$, 其中 α_x 是实数, $X(x)$ 的解为

$$X(x) = A_2 \sinh \alpha_x x + B_2 \cosh \alpha_x x$$

或

$$X(x) = A_3 e^{\alpha_x x} + B_3 e^{-\alpha_x x}$$

当 $k_x = 0$ 时, $X(x)$ 解的形式为

$$X(x) = A_4 x + B_4$$

圆柱坐标中二维通解为

$$\Phi(\rho, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^m + B_m \rho^{-m}) (C_m \sin m\varphi + D_m \cos m\varphi)$$

球坐标中二维通解为

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m r^m + B_m r^{-(m+1)}] P_m(\cos \theta)$$

各种形式通解中的系数由具体的边界确定。待定系数的求解是分离变量法的重点和难点。

(5) 镜像法和电轴法: 关键是镜像电荷的位置和镜像电荷的电量。

导体平面镜像: $h' = -h$, $q' = -q$

导体球面镜像: $h' = \frac{a^2}{h}$, $q' = -\frac{a}{h}q$

导体圆柱面镜像: $h' = \frac{a^2}{h}$, $\rho'_l = -\rho_l$

导体圆柱电轴: $h' = \frac{a^2}{h}$, $\rho'_l = \rho_l$

三、由场求源的方法

(1) 自由体电荷分布可由高斯定律微分形式或泊松方程求得

$$\rho_f = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

$$\rho_f = -\epsilon \nabla^2 \Phi$$

束缚体电荷可由极化强度求出

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

自由面电荷可由边界条件求得

介质分界面: $\rho_s = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)|_S = -\epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Big|_S + \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \Big|_S$

导体表面: $\rho_s = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}|_S = -\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_S$

束缚面电荷可由极化强度求出

$$\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}|_S$$

(2) 点、线电荷可根据场函数奇点的位置适当选取高斯面, 由高斯定律积分形式求得

$$Q = \oint_V \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

四、电容、静电能和静电力

平板电容

$$C = \varepsilon S / d$$

同轴电缆(单位长度)电容

$$C = 2\pi\varepsilon / \ln \frac{b}{a}$$

孤立导体球电容

$$C = 4\pi\varepsilon a^2$$

同心球形电容

$$C = 4\pi\varepsilon ab / (b - a)$$

体电荷分布系统的静电能

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho \Phi d\tau$$

导体系统的静电能

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi_i \int_{S_i} \rho_s dS_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i$$

用场矢量表示的静电能

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} d\tau$$

电场能量密度

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon}$$

虚位移法计算静电力可设带电量不变和电位不变两种情形, 计算结果是一样的, 即

$$\mathbf{F} = -\nabla W_e \Big|_{q=\text{const}}$$

$$\mathbf{F} = \nabla W_e \Big|_{\phi=\text{const}}$$

习 题 二

2.1 两个点电荷 q 和 $-q$ 分别位于 $+y$ 轴和 $+x$ 轴上距原点为 a 处, 求

(1) z 轴上任一点处电场强度的方向 \mathbf{a}_E ;

(2) 平面 $y=x$ 上任一点的 \mathbf{a}_E 。

2.2 xy 平面上半径为 a 的圆心位于原点的半圆环关于 x 轴对称, 且开口朝向 $+x$ 轴。

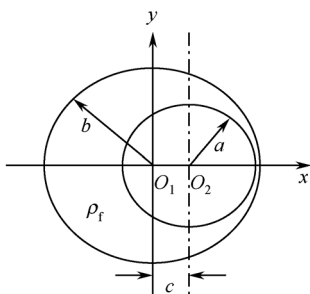
若半环上电荷线密度为 ρ_l , 求位于原点的点电荷 q 所受到的作用力。

2.3 卢瑟福在 1911 年采用的原子模型为: 半径为 r_a 的球体积中均匀分布着总电量为 $-ze$ 的电子云, 球心有一正电荷 ze (z 为原子序数, e 是质子的电量), 试证明他得到的原子内的电场和电位的表示式:

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_r = \frac{ze}{\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_a^3} \right)$$

$$\Phi = \frac{ze}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2r_a} + \frac{r^2}{2r_a^3} \right)$$

2.4 如题 2.4 图所示的两个轴线平行的无限长圆柱面之间有体电荷密度为 ρ_f 的电荷均匀分布, 其余部分为空气, 无电荷, $a+c < b$ 。求空间各点的电场强度。



题 2.4 图

2.5 计算在电场 $\mathbf{E} = a_x y + a_y x$ 中把一个 $-2 \mu\text{C}$ 的电荷沿以下两种路径从点 $(2, 1, -1)$ 移到 $(8, 2, -1)$ 时电场力所做的功:

- (1) 沿曲线 $x = 2y^2$;
- (2) 沿连接该两点的直线。

2.6 已知空间电场分布如下, 求空间各点的电荷分布为

$$(1) \quad \mathbf{E} = \begin{cases} a_\rho E_0 \left(\frac{\rho}{a} \right)^3 & (0 \leq \rho < a) \\ 0 & (a < \rho) \end{cases}$$

$$(2) \quad E_r = 2A \cos \theta / r^3, \quad E_\theta = A \sin \theta / r^3, \quad E_\phi = 0 \quad (r > 0)$$

2.7 大气中各点电场强度的经验分布为 $\mathbf{E} = -a_z E_0 (A e^{-\alpha z} + B e^{-\beta z})$, z 为从当地的地平面算起的高度; 所有的经验常数 A 、 B 、 α 、 β 皆为正数。求大气中电荷密度的经验分布, 并问它是正电荷还是负电荷?

2.8 假设所讨论的空间无电荷, 以下标量场是不是静电场的一种可能的电位分布?

- (1) $\sin(kx) \sin(l y) e^{-hz} \quad (h^2 = k^2 + l^2)$
- (2) $\rho^n (\cos n\phi + \sin n\phi)$
- (3) $r \cos \theta, \quad r^{-2} \cos \theta$
- (4) $e^{-y} \cosh x \quad (y > 0)$

2.9 以下矢量场是不是静电场的一种可能的分布? 若是, 找出其电位 ϕ 的函数式:

- (1) $\mathbf{E} = a_x (yz - 2x) + a_y xz + a_z xy$
- (2) $\mathbf{E} = a_x x^2 y + a_y x y^2 + a_z e^{-\beta y} \cos \alpha x \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数})$

2.10 半径为 a 的永久极化介质球, 球心在 origin, 均匀极化强度为 \mathbf{P} , 平行于 z 轴, 球外为空气。求 (1) 介质球表面的束缚电荷密度; (2) z 轴上任一点由束缚电荷产生的电位和电场强度。

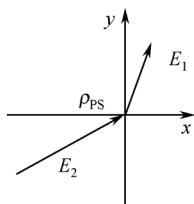
2.11 空气中半径为 b 的介质球内有一个半径为 a 的中空导体球壳, 介质的介电常数为 ϵ , 极化强度为 $\mathbf{P} = a_r k r$, 其中 k 为常数。求 (1) 束缚电荷密度的体密度和面密度; (2) 自由电荷密度 (3) 导体球面的电位。

- 2.12 均匀极化的一大块介质极化强度为 \mathbf{P} ，内部有一半径为 a 的球形空腔，求球心处的电场强度。
- 2.13 两种电介质的分界面为 $z=0$ 的平面，已知 $\varepsilon_{r1}=2$ ， $\varepsilon_{r2}=3$ ，若介质 1 中的电场为

$$\mathbf{E} = a_x 2y - a_y 3x + a_z (5+z)$$

求介质 2 中分界面处的 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 。

- 2.14 在 $y=0$ 的介质分界面上电场强度的矢线若如题 2.14 图所示，问介质分界面上的束缚电荷 ρ_{ps} 是正还是负？证明之。



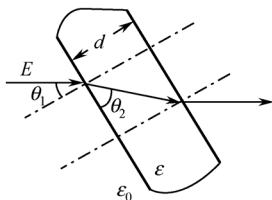
题 2.14 图

- 2.15 半径为 a 的薄导体壳的内表面涂了一层绝缘膜，球内充满总电量为 Q 的电荷，绝缘膜外的壳上又另充了电量 Q 。已知球内部电场为 $\mathbf{E} = a_r (r/a)^4$ ，求：① 球内电荷分布；② 球壳外表面上的电荷分布；③ 球壳的电位；④ 球心的电位。
- 2.16 电场中有一半径为 a 的圆柱，已知圆柱内、外的电位分布为

$$\Phi = 0 \quad (\rho \leq a)$$

$$\Phi = A \left(\rho - \frac{a^2}{\rho} \right) \cos \varphi \quad (\rho \geq a)$$

- (1) 求圆柱内、外的电场强度；
- (2) 这个圆柱是用什么材料制成的？表面有电荷吗？试求之。
- 2.17 厚度为 d 的无限大介质平板，电容率为 $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ ，放置于均匀电场 \mathbf{E}_0 之中， \mathbf{E}_0 向板的入射角为 θ_1 ，如题 2.17 图所示。求：
- (1) 使 $\theta_2 = \pi/4$ 的 θ_1 的值；
- (2) 板的两表面的束缚电荷密度。



题 2.17 图

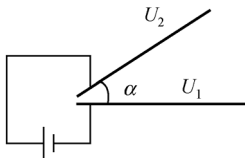
- 2.18 匀强电场 E_0 中放入一个半径为 a 的介质球 (介电常数为 ε) 后, 球内、外的电场分布变为

$$\Phi_1 = -\frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_0 r \cos \theta \quad (r \leq a)$$

$$\Phi_2 = -E_0 r \cos \theta + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} a^3 E_0 \frac{1}{r^2} \cos \theta \quad (r \geq a)$$

- (1) 验证球表面的边界条件, 并计算球表面的束缚电荷密度;
(2) 计算球内、外的电场强度。

- 2.19 两个无限大导体平板相交成 α 角, 但不接触, 电压分别为 U_1 和 U_2 ($U_1 < U_2$), 如题 2.19 图所示。求两板之间的电位分布、电场强度和板上的电荷分布。



题 2.19 图

- 2.20 同轴电缆内、外导体半径分别为 a 、 b , 电位分别为 U 、 0 , 内、外导体之间充满不均匀介质, 介电常数为 $\varepsilon(\rho) = k/\rho$ (k 为常数), 已知介质中没有自由电荷。

- (1) 导出该介质中的电位方程, 并求解;
(2) 求 E 及单位长度上内、外导体表面的自由电荷电量;
(3) 求束缚面电荷分布;
(4) 求此电缆单位长度的电容。

- 2.21 两个同心金属球壳组成一电容器。内、外壳半径分别为 a 、 b , 在两壳之间一半的空间填充介质 ε (介质分界面是过球心的平面), 求此电容器的电容。

- 2.22 平行板电容器中放入一层 $\varepsilon > \varepsilon_0$ 的介质后, 电容是增大还是减小了? 就两种情况作出解释:

- (1) 保持极板上的电量不变;
(2) 保持极板间电压不变。

- 2.23 同轴圆柱形电容器内、外导体半径分别为 a 和 b , b 为给定值。

- (1) 当外加电压 U 固定时, 问 a 为何值时可使电容器中的最大电场强度取得极小值, 并求出该极小值;
(2) 当已知介质的击穿场强为 E_{\max} 时, 问 a 为何值时电容器能承受极大电压? 并求出该极大电压值 U_{\max} 。

- 2.24 一个半径为 a 的导体球位于半径为 b 的导体球壳内, 两球同心, 内球电位为 U , 外壳电位为零, 求:

- (1) $a \leq r \leq b$ 区域中的电位分布;

(2) 内、外球之间的电容;

(3) 试证: 在 U 、 b 给定时, $a=b/2$ 可使内球表面处电场达到极小值, 并求出该极小值。

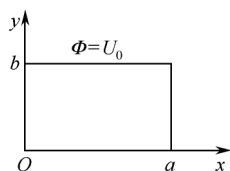
2.25 平行板极板间相距 2 cm, 其中有 1 cm 厚的玻璃, $\varepsilon = 7\varepsilon_0$, 击穿场强为 50 kV/cm; 其余为空气, 击穿场强为 30 kV/cm。问

(1) 若在极间加电压 40 kV, 此电容器会不会击穿?

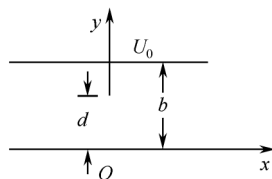
(2) 若将玻璃片取出, 会不会击穿?

2.26 如题 2.26 图所示, 有一长方形的导体槽, 设槽的长度为无限长, 电位为 0, 槽上有一块于槽绝缘的盖板, 电位为 U_0 , 求槽内的电位分布。

2.27 如题 2.27 图所示, 两无限大平行导体平面, 相距 b , 在 $x=0$ 的平面上 $d \leq y \leq b$ 处有一厚度可视为零导体薄片与上极板相连, 整个 T 型板的电位为 U_0 , 下极板电位为 0。若已知 $x=0$ 的平面上 $0 \leq y \leq d$ 范围内的电位为 $\Phi = U_0 y/d$, 求板间的电位分布。



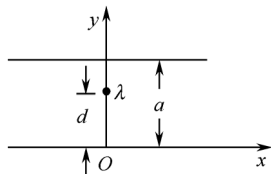
题 2.26 图



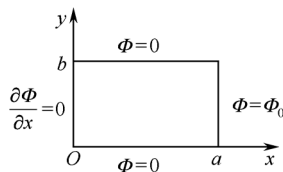
题 2.27 图

2.28 如题 2.28 图所示, 两无限大平行导体平面相距为 a , 上、下极板电位均为 0。它们之间有一与 z 轴平行的线电荷 λ (C/m), 位于 $(0, d)$ 处。求板间的电位分布。

2.29 z 方向无限长的矩形横截面场域, 如题 2.29 图所示。域内无电荷分布。已知边界条件如下: $\Phi|_{y=0} = \Phi|_{y=b} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x}|_{x=0} = 0$, $\Phi|_{x=a} = \Phi_0$ 。求场域内的电位分布。



题 2.28 图



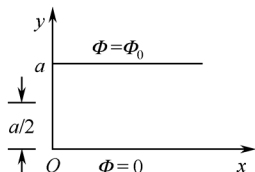
题 2.29 图

2.30 两块相互平行的半无限大导体平板, 板间距离为 a 。在同一端各取 $a/2$ 长, 折成直角相对, 但二者绝缘, 其横截面如题 2.30 图所示。域内无空间电荷分布。已知上板电位为 Φ_0 , 下板电位为 0。求板间电位分布。

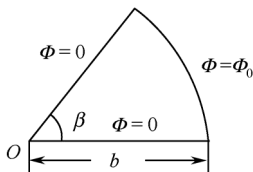
2.31 在均匀电场 $E = a_x E_0$ 中垂直于电场方向放置一不带电导体圆柱, 圆柱半径为

a 。设导体放入前, 导体轴线所在位置电位为 0。导体外无电荷分布。求圆柱外的电位函数和电场强度。

- 2.32** 一无限长圆柱形空间的横截面为扇形, 扇形的圆心角为 β , 圆弧半径为 b , 如题 2.32 图所示。柱形空间内无空间电荷分布。已知圆柱面电位为 Φ_0 , 两侧面电位为 0。求此柱形空间内的电位分布。



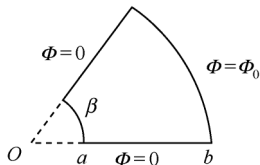
题 2.30 图



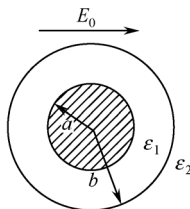
题 2.32 图

- 2.33** 一无限长圆柱形空间的横截面为部分圆环, 部分圆环的圆心角为 β , 内、外圆弧半径分别为 a 和 b , 如题 2.33 图所示。柱形空间内无空间电荷分布。已知外圆柱面电位为 Φ_0 , 内圆柱面和两侧面电位为 0。求此柱形空间内的电位分布。

- 2.34** 在均匀电场 $\mathbf{E} = a_x E_0$ 中垂直于电场方向放置一无限长的外包介质层的不带电导体圆柱, 圆柱半径为 a , 介质层外半径为 b 。设导体放入前, 导体轴线所在位置电位为 0。介质层的介电常数为 ϵ_1 , 介质层外部区域的介电常数为 ϵ_2 。导体外无自由电荷分布。求介质层内、外区域的电位分布。



题 2.33 图



题 2.34 图

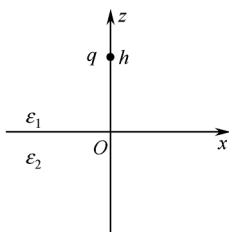
- 2.35** 一内半径为 a 的半无限长金属圆筒, 圆筒与底面绝缘。已知筒底电位为 Φ_0 , 圆筒电位为 0。筒内无空间电荷分布。求圆筒内的单位分布。
- 2.36** 在均匀电场 $\mathbf{E} = a_z E_0$ 中放入半径为 a 的导体球, 设 (1) 导体电位为 U_0 ; (2) 导体带电量为 Q 。分别计算以上两种情况下球外的电位。
- 2.37** 在一个半径为 a 的球面上, 给定电位分布 $\Phi(a, \theta) = \Phi_0(1 + \cos \theta)$ 。球内、外均无空间电荷分布。求球内、外的电位分布。
- 2.38** 一个半径为 a 的介质球被永久极化, 极化强度为 \mathbf{P} , 求证:

(1) 球内的电场是均匀的, 且 $\mathbf{D} = \frac{2}{3}\mathbf{P}$;

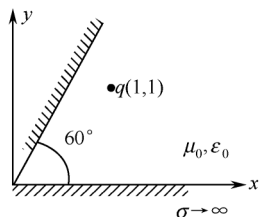
(2) 球外的电场同位于球心的电偶极子 $P\tau \left(\tau = \frac{4\pi a^3}{3} \right)$ 产生的电场相同, 且

$$\mathbf{D} = \frac{P\tau}{4\pi r^3}(\mathbf{a}_r 2\cos\theta + \mathbf{a}_\theta \sin\theta)$$

- 2.39 在一个电容率为 ε 的无限大介质中开一个半径为 a 的球形空腔, 已知介质中为匀强电场 $\mathbf{E} = \mathbf{a}_z E_0$, 求空腔内的电场强度和空腔表面的极化面电荷密度。
- 2.40 一点电荷 q 与无限大接地导体平面距离为 d , 试计算将此点电荷移至无穷远处, 电场力所做的功。
- 2.41 如题 2.41 图所示, 两个半无限大介质 ε_1 和 ε_2 的分界面为 $z = 0$ 平面, 介质 1 中 $z = h$ 处有一点电荷 q , 试求空间电位分布。
- 2.42 一点电荷 q 放在 60° 的接地导体角域内的 $x=1, y=1$ 点, 如题 2.42 图所示。求 $x=2, y=1$ 点的电位。

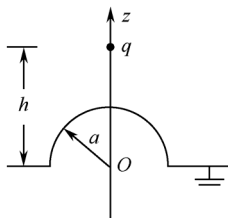


题 2.41 图



题 2.42 图

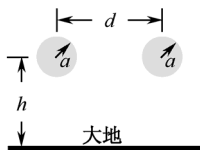
- 2.43 半径为 a 的导体球外有一点电荷 q , 距离球心 h ($h > a$), 求下列情况下球外空间的电位。(1) 导体球不接地不带电; (2) 导体球不接地带电量为 Q ; (3) 导体球电位为 U 。
- 2.44 如题 2.44 图所示, 在接地导体平面上, 有一半半径为 a 的半球形凸起, 半球的球心在导体平面上。设在半球对称轴上距球心 h ($h > a$) 处有一点电荷 q 。求 (1) 空间任意一点的电位; (2) 半球表面的感应电荷总量。



题 2.44 图

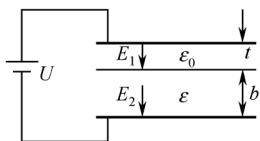
- 2.45 线电荷密度为 ρ_l 的无限长直线电荷, 与半径为 a 的无限长导体圆柱平行放置, 直线到圆柱轴线的距离为 h ($h > a$), 若 (1) 导体不接地、不带电; (2) 导体不接地但单位长度带电量为 ρ_{l0} , 分别求两种情况下导体圆柱外的电位。
- 2.46 试利用式 (2.8.9) 证明平行双线传输线的等位面是一族圆。
- 2.47 半径分别为 R_1 和 R_2 的两长直圆柱导线平行放置, 轴间距离为 d , 单位长度分别带电为 ρ_l 和 $-\rho_l$, 求导线外的电位分布和单位长度的电容。

- 2.48 半径为 a 的接地圆柱管内, 关于管轴对称地放置两根导线, 当导线带有等值异号电荷时, 要使它们之间不受作用力, 试证明它们的间距为 $2(\sqrt{5}-2)^{1/2}$ 。
- 2.49 半径均为 a 的两个导体小球, 距离地面为 h ($h \gg a$), 两球心相距为 d ($d \gg a$), 如题 2.49 图所示。求该导体系统的各部分电容及两小球之间的等效电容。



题 2.49 图

- 2.50 求内导体半径为 a , 外导体内半径为 b 的同轴线单位长度所储存的电能。
- 2.51 在半径分别为 a 和 b 的两个同心金属球壳构成的电容器中填充两层介质, $a \leq r \leq r_0$ 中填充介质 ϵ_1 , $r_0 \leq r \leq b$ 中填充介质 ϵ_2 , 试利用静电能来求出该电容器的电容。
- 2.52 平行板电容器中有一层介质, 厚度为 b , 其余为空气隙, 厚度为 t , 如题 2.52 图所示。设 $b+t$ 远小于极板线度, 边缘效应可忽略。两极间加直流电压 U 。
- (1) 求单位面积的上极板所受的力;
 - (2) 问受力的方向与 U 的极性有无关系?



题 2.52 图

- 2.53 平行板电容器的极板为正方形, 边长为 L , 板间距离为 d , 将其竖直地插入相对电容率为 ϵ_r 、密度为 m 的液体电介质中, 试证明: 当电容器加以恒定电压 U 时, 液面升高为

$$h = \frac{1}{2mg} (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \left(\frac{U}{d} \right)^2$$

第3章

恒定电场

相对于观察者来说,静止分布的电荷产生的物理场是静电场,那么当电荷相对于观察者以速度 v 运动时,又将怎样呢?实验指出,运动的电荷既产生电场,又产生磁场。

电荷的运动形成电流,电流强度不随时间变化时称为**恒定电流**,恒定电流的场称为恒定场。恒定场的产生有两种途径:一种是由恒定电源和导体构成的电流回路产生的,这种导体中的电流称为**传导电流**;一种是由气体或真空中定向运动的带电粒子束产生的,这种气体或真空中的电流称为**运流电流**。

两种恒定电流的共同点是,电荷虽然在定向运动,但每一点的电荷密度不随时间变化。区别是传导电流依靠导电媒质中的自由电子定向运动,但在每一点正、负电荷密度相等,呈静电中性,且服从欧姆定律;而运流电流则是非零净电荷的定向运动,不服从欧姆定律。

本章主要研究导体中的恒定电场,下一章再研究恒定电流产生的恒定磁场。导体也称为导电媒质,泛指一切载有大量或少量自由电子的媒质。

→ 3.1 电流密度

3.1.1 电流强度和电流密度

电路中常见的电流是沿着一根导线流动的电流,其强度定义为单位时间内通过导线某一截面的电量。若在 Δt 时间内流过某一截面 S 的电量为 Δq ,则通过该截面的电流 I 为

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (3.1.1)$$

单位是 A (安)。1 A=1 C/s, 这表明,电流代表电荷穿过某一截面的速率。

在实际问题中,当电流流过的区域相对较大时,还需要了解某一点的电流分布情况,因此,我们引入**电流密度**的概念。对在导电媒质中流动的体电流,定义垂直流过包括某点在内的单位面积上的电流强度为该点的电流(面)密度的大小,正电荷的运动方向 a_v 为电流密度的方向。若垂直流过面积 ΔS 的电流为 ΔI ,则电流密度矢量可定义为

$$\mathbf{J} = a_v \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \quad (\text{A/m}^2) \quad (3.1.2)$$

类似地,可定义流过理想表面的电流垂流过单位长度的电流(线)密度,若垂流过线元 Δl 的电流为 ΔI ,则面电流密度矢量可表示为

$$\mathbf{J}_s = a_v \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \quad (\text{A/m}) \quad (3.1.3)$$

电流密度是点的函数,按照式(3.1.2)和式(3.1.3)的定义,若已知电流密度,则体电流和面电流的电流强度分别为

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.1.4)$$

$$I = \int_C \mathbf{J}_s \cdot a_n dl \quad (3.1.5)$$

注意,式中的 a_n 是线元 $d\mathbf{l}$ 的法线方向。

3.1.2 电流密度和电荷密度

对一段导体中的传导电流或者真空(空气)中的运流电流,若已知某点电流密度为 \mathbf{J} ,载流子或带电粒子电荷密度为 ρ ,运动速度为 \mathbf{v} ,则如图3-1所示小体积内的电荷在 Δt 时间内将全部穿过截面 ΔS ,由式(3.1.1)和式(3.1.2)可得

$$\mathbf{J} = a_v \frac{\Delta I}{\Delta S} = a_v \frac{\Delta q}{\Delta S \Delta t} = a_v \frac{\rho v \Delta t \Delta S}{\Delta S \Delta t}$$

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (3.1.6)$$

即

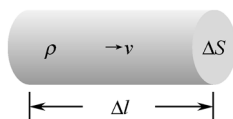


图 3-1 电流密度与电荷密度

类似的,对面电流和线电流,有

$$\mathbf{J}_s = \rho_s \mathbf{v} \quad (3.1.7)$$

$$I = \rho_l v \quad (3.1.8)$$

若图3-1所示的小体积中有几种带电粒子,电荷密度为 ρ_i ,运动速度为 \mathbf{v}_i ,则电流密度为

$$\mathbf{J} = \sum_i \rho_i \mathbf{v}_i \quad (3.1.9)$$

例如金属导体中,设正离子密度为 ρ^+ ,则自由电子密度为 ρ^- ,由于正离子运动速度 $\mathbf{v}^+ \approx 0$,自由电子运动速度 $\mathbf{v}^- \neq 0$,因此电流密度为

$$\mathbf{J} = \rho^+ \mathbf{v}^+ + \rho^- \mathbf{v}^- \approx -\rho^- \mathbf{v}^-$$

3.1.3 欧姆定律和焦耳定律

根据经典的金属电子理论,导体外加电场后,自由电子具有逆电场方向运动的加速度,但在加速过程中会不断地与晶体点阵碰撞而失去动能,同时又受电场力作用而再次

获得动能，此过程连续不断从而形成传导电流。可以证明，传导电流与导体中的电场具有以下关系

J = σE (3.1.10)

式中，σ 是导体的电导率，单位是 S/m（西门子/米），它是电阻率（单位Ω·m）的倒数，表 3-1 给出了一些常用材料的电导率。

表 3-1 常用材料的电导率

材 料	电导率 σ (S/m)	材 料	电导率 σ (S/m)
银	6.14×10 ⁷	清水	10 ⁻³
铜（退火的）	5.80×10 ⁷	酒精	3.3×10 ⁻⁴
金	4.10×10 ⁷	蒸馏水	2×10 ⁻⁴
铝	3.54×10 ⁷	干土	10 ⁻⁵
钨	1.81×10 ⁷	变压器油	10 ⁻¹¹
铁	10 ⁷	普通玻璃	10 ⁻¹²
钢	(0.5~1.0)×10 ⁷	硬橡皮	10 ⁻¹⁴ ~10 ⁻¹⁶
铅	0.48×10 ⁷	聚四氟乙烯	<10 ⁻¹⁶
水银，镍铬合金	0.1×10 ⁷	熔融石英	<10 ⁻¹⁷

式（3.1.10）称为**导体的本构关系**，对于常温下均匀的线性的各向同性媒质，σ 是实常数。对于此类媒质，式（3.1.10）表明，在导体中 **J** 和 **E** 方向相同，且大小成正比。满足式（3.1.10）的材料称为欧姆材料，式（3.1.10）也称为**欧姆定律的微分形式**。对长度为 *l* 截面积为 *S* 的一段均匀导体，把 $J = \frac{I}{S}$ 、 $E = \frac{U}{l}$ 、 $R = \frac{l}{\sigma S}$ 代入式（3.1.10）中，即可得到欧姆定律的积分形式

U = RI (3.1.11)

设某导电媒质中，电荷 ρΔτ 在电场 **E** 中受到力的作用，在 Δ*t* 时间内以平均速度 **v** 位移了 Δ*l*，则电场力

ΔF = ρΔτE

对这部分电荷所做的功为

ΔW = ΔF · Δl = ρΔτE · vΔt = J · EΔτΔt

功率为

Δp = ΔW / Δt = J · EΔτ

定义**功率密度** *p* 为单位体积的功率（W/m³），即 Δ*p* = *p*Δτ，则由上式可得

p = J · E (3.1.12)

式（3.1.12）称为**焦耳定律**（Joule’s law）的微分形式。

整个体积τ 内的功率

P = ∫_τ p dτ = ∫_τ J · E dτ (3.1.13)

式(3.1.13)称为焦耳定律的积分形式。

功率密度的物理意义：自由电子在导电媒质中运动时，不断地与晶体点阵碰撞而失去动能，又在电场的作用下重新获得动能，继而又由于碰撞而失去动能，如此反复。也就是说，电场供给的功率以热的形式消耗在导电媒质中。因此，功率密度 p 表示电场作用于导电媒质在单位体积内热损耗（焦耳损耗）的速率。

对于线性媒质， $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ，式(3.1.12)和式(3.1.13)可写为

$$p = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma} \quad (3.1.14)$$

$$P = \int_{\tau} \sigma E^2 d\tau = \int_{\tau} \frac{J^2}{\sigma} d\tau \quad (3.1.15)$$

本节思考与练习

- 3.1 半径为 a 的导线中电流密度分布为 $\mathbf{J} = a_z J_0 \rho$ ，电流强度是多少？
- 3.2 设 xy 面上存在着密度为 $\mathbf{J}_s = a_x y + a_y x$ (A/m) 的面电流，计算穿过表面上两点 (2, 1) 和 (5, 1) 之间的线段上的电流。
- 3.3 电量 Q 在以原点为球心，半径为 a 的球体积中均匀分布。若是该球绕 z 轴以角速度 ω 匀速旋转，假设电荷分布不受旋转的影响，求球内的电流密度。
- 3.4 试证明线性导体中焦耳定律的等价形式 $P = I^2 R$ 。
- 3.5 平板电容器的面积为 4 cm^2 ，间距为 0.1 cm ，板间填充电导率为 $4 \times 10^{-5} \text{ S/m}$ 的媒质，板间加电压 90 V 。求板间电场强度、电流密度、功率损耗和媒质电阻。

➔ 3.2 恒定电场的基本方程

3.2.1 电流连续性方程及恒定电场基本方程

按照通量的定义，电流密度对任意一个闭合曲面的积分

$$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.2.1)$$

表示净流出该闭合面的电流，也就是单位时间内流出闭合面的正电荷的电量。根据电荷守恒定律，流出闭合面的电量应等于闭合面内减少的电量。因此，式(3.2.1)应等于闭合面内电荷量的减小率，即

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} \quad (3.2.2)$$

这就是用数学式表达的电荷守恒原理，也称为电流连续性方程，式(3.2.2)是其积分形式。它表明：任意时刻若闭合面内电荷量减少，则有净电流流出；闭合面内电荷量增加，则有净电流流入。

若闭合面内充满密度为 ρ 的电荷,则容易写出电流连续性方程的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.2.3)$$

对于我们讨论的恒定电流情形,不存在电荷密度变化的点,因此,式(3.2.2)和式(3.2.3)简化为

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3.2.5)$$

以上两式表明,导电媒质中流过的恒定电流是无散的或连续的,恒定电流从闭合面的一侧流入,必从另一侧全部流出,也就是说,通过任意闭合面的净恒定电流为零。

若将闭合面分成 n 片,穿过每一片面积的电流强度设为 I_i 则式(3.2.4)可写为

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (3.2.6)$$

这正是电路理论中的**基尔霍夫电流定律**(Kirchhoff's Current Law),表明流出任意广义节点的电流的代数和为零。实际上,电路理论就是电磁理论的一个分支,是在集总参数条件下应用的电磁理论的积分形式。

另外,导电媒质中电荷分布不随时间变化的特征使恒定电场具有和静电场相似的特征,即恒定电场也是无旋场,仍有 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ 成立。

因此,导电媒质中恒定电场的基本方程可总结为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{cases} \quad (3.2.7)$$

需要说明的是,在恒定电场中,高斯定律依然成立,但不能作为求解导电媒质中恒定电场的基本方程使用。因为媒质的电导率 σ 决定了 \mathbf{J} 和 \mathbf{E} 的关系,而 \mathbf{D} 是由 ε 和 \mathbf{E} 决定的,只有利用恒定电场的基本方程解出 \mathbf{E} 后,才可以应用高斯定律求出净电荷分布。

由于恒定电场是无旋场,同样可以引入电位 Φ ,即令

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi$$

代入散度方程 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$,并利用本构关系 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$,有

$$\nabla \cdot (\sigma \mathbf{J}) = \nabla \sigma \cdot \mathbf{J} + \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

对均匀导体, $\nabla \sigma = 0$,这时有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.2.8)$$

及

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.2.9)$$

可见,在均匀导电媒质中净电荷密度 $\rho = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$,且电位满足拉普拉斯方程。

3.2.2 电动势

恒定电场的基本方程(3.2.7)表明,在导电媒质中恒定电(流)场无散也无旋。因此,在此区域中,有基本方程的积分形式

$$\begin{cases} \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \end{cases} \quad (3.2.10)$$

那么产生恒定电场的源究竟在哪里呢？答案就是外加的电源。外加电源可由多种形式的能源转化而来，如化学反应（电池）、机械驱动（直流发电机）、光激发源（太阳能电池）、热敏装置（热电偶）等。这些装置把非电能转化为电能，在装置内部建立起局外场（非保守电场） \mathbf{E}' 。

例如图 3-2 所示的电池外接负载电阻的简单电路，在电池内部，化学反应结果是非保守场 \mathbf{E}' 把正电荷从 B 端搬移到 A 端，从而在 A、B 端建立并维持动态平衡的场源电荷。此电荷分布在电池内部形成库仑场 \mathbf{E} ，在电池外部的导体回路中形成恒定电（流）场。因此，电池内部总场为 $\mathbf{E}' + \mathbf{E}$ ，电池外部的导线和负载电阻中则是传导电流的恒定电场。

若沿电流回路并经电源内部选取积分路径，则电场的环量可表示为

$$\oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{E}') \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \quad (3.2.11)$$

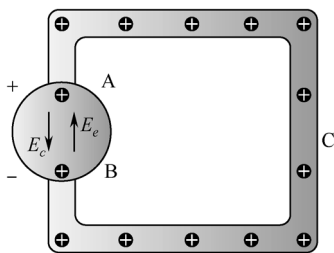


图 3-2 直流电路中的保守场和非保守场

式中，库仑场的环量为

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A2} \frac{\mathbf{J}_1}{\sigma_1} \cdot d\mathbf{l} + \int_{23} \frac{\mathbf{J}_L}{\sigma_L} \cdot d\mathbf{l} + \int_{3B} \frac{\mathbf{J}_1}{\sigma_1} \cdot d\mathbf{l} + \int_{B1A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.2.12)$$

其中，角标 1 为指导线，角标 L 指负载电阻。非保守场的环量 $\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \int_{B1A} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}$ 定义为**电动势**，即

$$e = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \quad (3.2.13)$$

可见，当积分路径穿过电源内部时，总电场的环量不为零，而是等于电动势，电动势的存在维持了闭合回路中的恒定电（流）场。

由式 (3.2.11)、式 (3.2.12)、式 (3.2.13) 还可得出下式

$$e = \oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \int_{B1A} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = \int_{A1B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A2} \frac{\mathbf{J}_1}{\sigma_1} \cdot d\mathbf{l} + \int_{23} \frac{\mathbf{J}_L}{\sigma_L} \cdot d\mathbf{l} + \int_{3B} \frac{\mathbf{J}_1}{\sigma_1} \cdot d\mathbf{l}$$

也就是

$$e = U_{A2} + U_{23} + U_{3B} = \sum U_i \quad (3.2.14)$$

这正是电路理论中的**基尔霍夫电压定律** (Kirchhoff's Voltage Law), 表明 (在集总电路中) 沿任一回路的电动势的代数和等于各元件电压降的代数和。

本节思考与练习

- 3.6 恒定电场的基本方程与静电场的基本方程有何异同点? 恒定电场的场源是什么?
- 3.7 两同心导体球壳, 内、外半径分别为 a 和 b , 内、外导体间加电压 U 。两球壳之间填充电容率为 ϵ 、电导率为 σ 的媒质。求媒质中的电位分布、电流密度, 并求该电容器储存的电能和媒质消耗的功率。
- 3.8 对于电导率不为零的线性、各向同性、非均匀介质, 证明当介质中存在恒定电流时, 体积中将出现自由电荷, 密度为 $\rho = \mathbf{J} \cdot \nabla \frac{\epsilon}{\sigma}$ 。
- 3.9 均匀导电媒质在接通电源后达到稳态前的暂态过程中, 媒质中电荷密度随时间变化所满足的微分方程称为驰豫方程, 试利用电流连续性方程 (3.2.3) 推导之。其中 $\tau = \epsilon / \sigma$ 称为电荷的驰豫时间, 试计算铜 ($\sigma = 5.8.0 \times 10^7 \text{ S/m}$, $\epsilon_r \approx 1$) 和云母 ($\sigma = 1.0 \times 10^{-15} \text{ S/m}$, $\epsilon_r = 6.0$) 的驰豫时间, 从中可得到什么结论?

→ 3.3 恒定电场的边界条件

根据静电场理论我们知道, 在两种不同介质的分界面处, 一般会出现极化面电荷, 因此电场在分界面两侧会发生突变。恒定电场中除了媒质的极化现象外, 由于界面两侧电导率不同, 电流在流经分界面时, 通常会在刚接通电源及至达到恒定状态之间的暂态过程中在分界面上积聚起或正或负的自由面电荷, 这些电荷同样会对恒定电 (流) 场产生影响, 使其在分界面上发生突变, 而突变的原则应满足恒定电场基本方程的积分形式。

采用与静电场边界条件相同的分析方法, 由基本方程 (3.2.10) 可得到两种不同媒质的分界面上恒定电 (流) 场的法向和切向边界条件分别为

$$J_{1n} = J_{2n} \quad \text{或} \quad \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n} \quad (3.3.1)$$

$$\text{和} \quad E_{1t} = E_{2t} \quad (3.3.2)$$

用电位表示的法向和切向边界条件分别为

$$\sigma_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \quad (3.3.3)$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (3.3.4)$$

另外, 应用高斯定律还可计算出分界面上的自由电荷面密度为

$$\rho_s = D_{1n} - D_{2n} \quad (3.3.5)$$

恒定电场中不同媒质分界面上电（流）场的折射关系则可参照图 3-3 得出

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{J_{1t}/J_{1n}}{J_{2t}/J_{2n}} = \frac{\sigma_1 E_{1t}}{\sigma_2 E_{2t}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \quad (3.3.6)$$

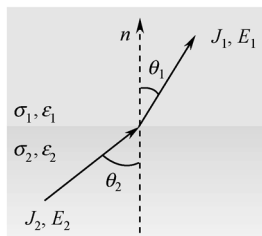


图 3-3 不同媒质分界面上的边界条件

例 3.1 同轴线内、外导体半径分别为 a 和 b ，两导体之间填充的介质略有漏电，电导率为 σ （非零常数），外加电压为 U ，求漏电介质中的 Φ 、 E 、 J 和单位长度的电导。

解 由于漏电介质是均匀的，故 Φ 满足拉普拉斯方程。关于 Φ 的边界条件应这样考虑：由于内、外导体中存在着电流，故而导体的边界两侧都存在切向轴向的电场分量。但由于良导体中电场极微小，这个切向电场与同轴线内、外导体之间的径向电场相比完全可以忽略，因而金属表面仍可近似看做等位面；于是可分别假设内、外导体电位为 U 和 0，求解一维拉普拉斯方程而得到

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{U}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{\rho} \\ E &= -\nabla \Phi = -a_\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = a_\rho \frac{U}{\rho \ln \frac{b}{a}} \\ J &= \sigma E = a_\rho \frac{\sigma U}{\rho \ln \frac{b}{a}} \end{aligned}$$

单位长度的同轴线总漏电流为

$$I_0 = J \cdot 2\pi\rho = \frac{2\pi\sigma U}{\ln \frac{b}{a}}$$

单位长度的漏电导为

$$G_0 = \frac{I_0}{U} = 2\pi\sigma / \ln \frac{b}{a}$$

例 3.2 图 3-4 所示平行板电容器极板面积为 S ，内充两层介质，厚度分别为 d_1 和 d_2 ，电容率分别为 ϵ_1 和 ϵ_2 。若介质有漏电，电导率分别为 σ_1 和 σ_2 ，求该电容器的漏电导；并求外加电压 U 时，电容器中的电流密度以及两介质分界面上的自由电荷密度 ρ_s 和束缚电荷密度 ρ_{ps} 。

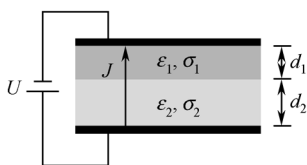


图 3-4 填充两层漏电介质的平行板电容器

解 极板间电位方程与静电场情形相同，场量 \mathbf{D} 、 \mathbf{P} 、 \mathbf{E} 、 \mathbf{J} 方向均向上，设介质分界面法线方向 \mathbf{n} 由 2 指向 1。由恒定电场的边界条件和极板间的电位关系，可列出方程组

$$\begin{cases} \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \\ E_1 d_1 + E_2 d_2 = U \end{cases}$$

从而求出

$$E_1 = \frac{\sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} \quad E_2 = \frac{\sigma_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

电容器中的电流密度为

$$J = \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

电容器的漏电导为

$$G = \frac{JS}{U} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 S}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$$

介质分界面的自由电荷密度为 $\rho_s = D_1 - D_2 = \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} \right) J = \frac{\sigma_2 \varepsilon_1 - \sigma_1 \varepsilon_2}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} U$

介质 1 在分界面上的束缚电荷为 $\rho_{ps1} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_1 = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \frac{J}{\sigma_1}$

介质 2 在分界面上的束缚电荷为 $\rho_{ps2} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_2 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \frac{J}{\sigma_2}$

则介质分界面上的束缚电荷为

$$\rho_{ps} = \rho_{ps1} + \rho_{ps2} = \left(-\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\sigma_1} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_0}{\sigma_2} \right) J = \frac{\sigma_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) - \sigma_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} U$$

本节思考与练习

3.10 不同导电媒质分界面上的边界条件由 \mathbf{E} 、 \mathbf{J} 、 \mathbf{D} 的哪些场量决定？如何决定？

3.11 图 3-5 所示平行板电容器极板面积为 S ，板间距离为 d ，内充两种介质，各占一半空间，电容率分别为 ε_1 和 ε_2 。若介质有漏电，电导率分别为 σ_1 和 σ_2 ，求该电容器的漏电导；并求外加电压为 U 时，电容器中的电流密度。

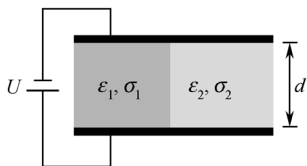


图 3-5 题 3.11 图

3.12 半径为 a 的圆柱形直导线, 电导率为 σ , 通有电流 I , 且表面均匀分布面电荷为 ρ_s 。求导线内及导线表面处的电场强度。

3.4 恒定电场与静电场的比拟

从例 3.2 的分析和计算中, 我们可以比较一下恒定电场和静电场的异同点:

(1) 在相同边界限定的区域中, 外加恒定电压的条件下, 区域内是恒定电场还是静电场取决于媒质的导电性。 $\sigma=0$ 的介质中形成静电场, 静电场建立起来后, 即使撤掉外加电源, 静电场仍然能够保持不变, 例如充电电池充完后即不用再插电源; $\sigma \neq 0$ 的导电媒质中形成恒定电(流)场, 但是一旦撤掉电源, 恒定电(流)场即不复存在, 极板上的自由电荷受力位移形成暂态电流并中和各个界面上的自由电荷, 最终电场消失殆尽。

(2) 静电场中, 在两种不同(完纯)介质分界面上, $\rho_s=0$; 恒定电场中, 在两种不同(导电)媒质分界面上, $\rho_s = D_{1n} - D_{2n} = -\rho_{s\text{上极板}} - \rho_{s\text{下极板}}$ 。这些电荷是在接通电源后的暂态过程中扩散到表面或分界面上去的。对于不良电介质, 虽然其电导率仅是金属电导率的大约 $\frac{1}{10^{20}}$, 但其漏电流与金属导体中的电流同属传导电流, 因而呈现出与金属导体类似的电荷向表面扩散的现象, 只不过电荷驰豫时间上与金属有量的差别。

(3) 例 3.2 在静电场情形 ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$), $\rho_{s\text{上极板}} = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} = -\rho_{s\text{下极板}}$, 极板上的电荷分布与介质的介电常数有关; 而在恒定电场情形 ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq 0$), 极板上电荷分布为 $\rho_{s\text{上极板}} = -\frac{\sigma_1 \varepsilon_2 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$, $\rho_{s\text{下极板}} = \frac{\sigma_2 \varepsilon_1 U}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2}$, 既与介电常数有关, 也与电导率有关, 且 $\rho_{s\text{上极板}} \neq \rho_{s\text{下极板}}$ 。

(4) 例 3.2 在静电场情形相当于两个电容串联, 等效电路如图 3-6 (a) 所示, C_1 、 C_2 上的电压取决于 C_1 、 C_2 本身; 而在恒定电场中, 漏电流

$$G = \frac{JS}{U} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 S}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} = \frac{1}{\frac{Sd_1}{\sigma_1} + \frac{Sd_2}{\sigma_2}} = \frac{1}{G_1 + G_2}$$

相当于两个电导的并联, 因而图 3-4 的等效电路如图 3-6 (b) 所示, 其中 C_1 、 C_2 上的电压取决于 G_1 、 G_2 上的分压。

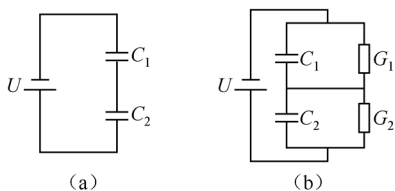


图 3-6 双层漏电介质平板电容器的等效电路

(5) 例 3.2 所示的电容器中, 无论是静电场情形还是恒定电场情形, 电位均满足拉普拉斯方程, 因此, 电位的通解形式是相同的。但恒定电场中电位的边界条件满足式 (3.3.3) 和式 (3.3.4), 只与 σ 有关; 而静电场中电位的边界条件满足式 (2.5.4) 和式 (2.5.8), 只与 ε 有关。可见, 相同边界情况下, 恒定电场的解可通过静电场的解比对应得出, 只要将 ε 换成 σ 即可。这种方法称为**静电比拟法**。

恒定电场与静电场可比拟的数学公式列出如下。

恒定电场:	静电场:
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$
$\nabla^2 \Phi = 0$	$\nabla^2 \Phi = 0$
$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$	$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$
$I = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$	$q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$
$G = \frac{I}{U}$	$C = \frac{q}{U}$

其中, 闭合面积分是指包围电容器的一个电极的闭合面。从上述公式中可看出恒定电场与静电场的各个物理量之间的一一对应关系:

恒定电场	\mathbf{E}	\mathbf{J}	Φ	I	σ	G
静电场	\mathbf{E}	\mathbf{D}	Φ	q	ε	C

利用静电比拟关系可以用静电场来比拟恒定电场, 从而简化静电场的计算, 也可以用恒定电流场来模拟静电场, 从而便于实验测量。

例 3.3 同轴线内、外导体半径分别为 a 和 b , 填充的介质略有漏电, 电导率为 σ , 求单位长度的漏电导。

解 内、外导体间的电位和电场强度分布均与介质不漏电时的静电场相同, 分别为

$$\Phi = \frac{U}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{b}{\rho}$$

和

$$E_\rho = \frac{U}{\rho \ln \frac{b}{a}}$$

不同的是, 介质中有漏电流

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = a_\rho \frac{\sigma U}{\rho \ln \frac{b}{a}}$$

单位长度的漏电流为

$$I_0 = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma U}{\rho \ln \frac{b}{a}} 2\pi\rho = \frac{2\pi\sigma U}{\ln \frac{b}{a}}$$

单位长度的漏电导为

$$G_0 = \frac{I_0}{U} = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$$

若采用静电比拟法, 则不必计算电流, 直接由单位长度的电容得到电导

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}} \xrightarrow{\epsilon_0 \rightarrow \sigma} G_0 = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{b}{a}}$$

例 3.4 半径为 a 的半球形浅埋接地器如图 3-7 (a) 所示, 土壤电导率为 σ , 求接地电阻。

解 接地电阻是指接地器至无穷远的大地电阻。经该接地器流向大地的电流场与同样形状电极的静电场相似, 考虑到地面的影响, 半球形接地器的镜像系统如图 3-7 (b) 所示 (满足恒定电场边界条件 $J_{1n} = J_{2n} = 0$, $E_{1t} = E_{2t}$)。图 3-7 (b) 所示的孤立导体球的电容为 $4\pi\epsilon a$, 故图 3-7 (a) 所示半球的电容为 $C = 2\pi\epsilon a$, 接地电导即为 $G = 2\pi\sigma a$, 从而有 $R = 1/2\pi\sigma a$ 。

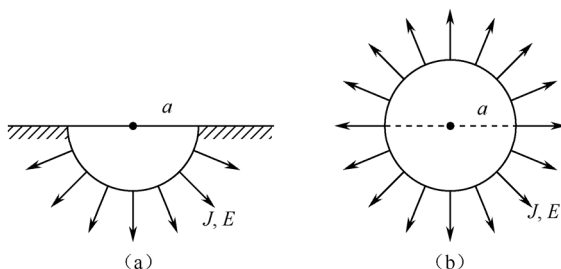


图 3-7 半球形浅埋接地器

本节思考与练习

- 3.13 恒定电场的哪些物理量可以和静电场比拟? 如何比拟?
- 3.14 接地电阻是指什么?
- 3.15 例 3.4 中的半球形浅埋接地器, 半径为 10 cm, 土壤电导率为 0.6 S/m, 若一次雷电中引下来电流 100 kA, 则跨步电压在安全电压范围内的安全半径是多少? (设人的跨步为 0.8 m, 安全电压为 36 V)。若要将安全半径减小到 10 m, 接地器周围的土壤中应掺入电导率多大的导电媒质?
- 3.16 一个半径为 0.4 m 的导体球当做电极深埋地下, 土壤的电导率设为 0.6 S/m, 假设地面的影响可以忽略不计, 求该接地器的接地电阻。

3.5 恒定电场的 MATLAB 运算和仿真

恒定电场和静电场在无源区具有相同基本方程, 因此 MATLAB 计算和仿真都相似。

例 3.5 求非深埋球形接地器的电流分布。

解 非深埋球形接地器如图 3-8 所示。

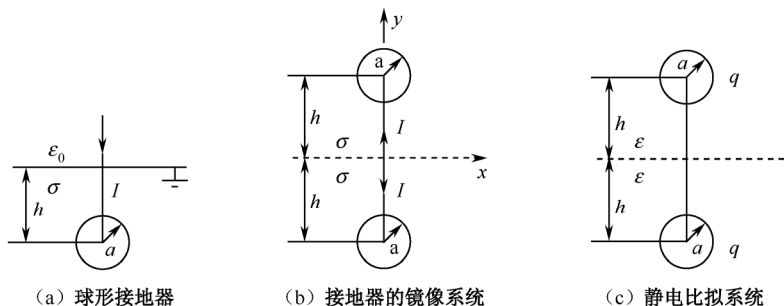


图 3-8 非深埋球形接地器及其镜像系统

由于空气中不存在传导电流即 $\mathbf{J}_1 = 0$, 且恒定电场法向边界条件必须满足 $J_{1n} = J_{2n}$, 因此可知在 $y=0$ 平面电流只存在切向分量。于是接地器周围的电流场可用图 3-5-1 (b) 所示的镜像系统来求解, 该镜像系统又可由图 3-5-1 (c) 所示的静电比拟系统来求解。于是可得图 3-5-1 (c) 中场点 (x,y) 的电位为

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+h)^2}} \right)$$

由静电比拟的关系, 可得图 3-5-1 (b) 中场点的电位为

$$\Phi = \frac{I}{4\pi\sigma} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+h)^2}} \right)$$

电流密度则为

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \nabla \Phi = -\frac{I}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-h)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+h)^2}} \right)$$

为简单, 取 $\frac{I}{4\pi} = 1$, $h = 1.0$, $a = 0.5$, $\sigma = 1$ 。

%非深埋球形接地器的镜像系统电流场

x=linspace(-3,3,15);y=linspace(-3,3,15);

[x,y]=meshgrid(x,y);

A=1./sqrt(x.^2+(y+1).^2)+1./sqrt(x.^2+(y-1).^2);

[px,py]=gradient(-A,6/15,6/15);

p=sqrt(px.^2+py.^2+eps);

% x,y ∈ [-3,3] 产生等间隔的 15 个点

%在直角坐标中划分网格

%计算电位

%计算电流密度

```

px=px./p;py=py./p;                                %对电流密度的 x 和 y 分量归一化
quiver(x.*(sqrt(x.^2+(y+1).^2)>.25).*(sqrt(x.^2+(y-1).^2)>.25),
y.*(sqrt(x.^2+(y+1).^2)>.25).*(sqrt(x.^2+(y-1).^2)>.25),px,py,.5)
                                                    %画两球外部的矢量图

hold on
xlim([-3,3]);                                       %将显示范围限制在网格内
ylim([-3,3]);
ezplot('x^2+(y+1).^2-.25',[-3,3,-3,3]);            %画出接地器图形
hold on
ezplot('x^2+(y-1).^2-.25',[-3,3,-3,3]);            %画出镜像接地器图形

```

所得到的镜像系统的电流分布矢量图如图 3-9 所示。

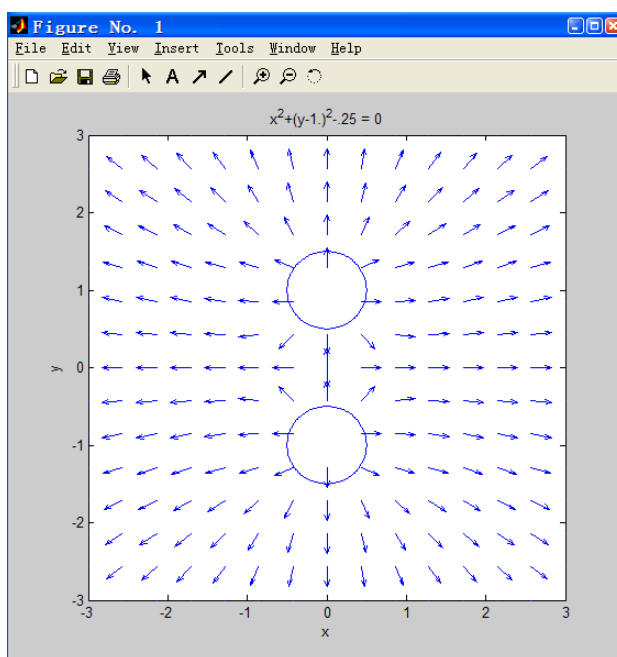


图 3-9 镜像系统的电流分布矢量图

```

%非深埋球形接地器的电流场
x=linspace(-3,3,15);y=linspace(-3,0,7);           % x ∈ [-3,3] 产生等间隔的 15 个点,
                                                    % y ∈ [-3,0] 产生等间隔的 7 个点
[x,y]=meshgrid(x,y);                               %在直角坐标中划分网格
A=1./sqrt(x.^2+(y+1).^2)+1./sqrt(x.^2+(y-1).^2);    %计算电位
[px,py]=gradient(-A,6/15,3/7);                     %计算电流密度
p=sqrt(px.^2+py.^2+eps);
px=px./p;py=py./p;                                  %对电流密度的 x 和 y 分量归一化
quiver(x.*(sqrt(x.^2+(y+1).^2)>.25),y.*(sqrt(x.^2+(y+1).^2)>.25),px,py,.5)
                                                    %画球形接地器外的矢量图
hold on                                              %图形保持

```

```
xlim([-3,3]); %将显示范围限制在网格内
ylim([-3,3]);
ezplot('x^2+(y+1)^2-.25',[-3,3,-3,3]); %画出接地器图形
```

所得到的球形接地器的电流分布矢量图如图 3-10 所示。

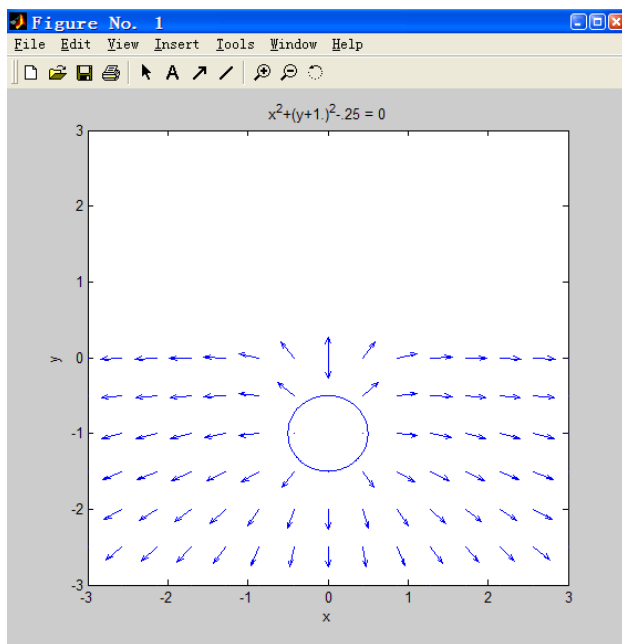


图 3-10 球形接地器的电流分布矢量图

本节思考与练习

3.17 求浅埋半球形接地器（球心位于地平面上）的电流分布。

本章小结

恒定电场研究的是导体中恒定电流（运动电荷）的场。体电流 \mathbf{J} 和面电流 \mathbf{J}_s 是恒定电场的重要物理量，与之相关的四个关系式是恒定电场内容的重要组成部分：

1. 与电流强度的关系式

体电流
$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

面电流
$$I = \int_C \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{a}_n dl$$

2. 与运动电荷的速度 \mathbf{v} 及电荷密度的关系式为

体电荷
$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

面电荷

$$J_s = \rho_s v$$

线电荷

$$I = \rho_l v$$

多种电荷

$$J = \sum_i \rho_i v_i$$

3. 与导电媒质中的电场强度的关系

$$J = \sigma E$$

4. 与导电媒质中的损耗功率密度的关系

$$p = J \cdot E$$

另外, 用电流密度描述的电流连续性方程

$$\oint_S J \cdot dS = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad (\text{积分形式})$$

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{微分形式})$$

在恒定电场条件下的形式

$$\oint_S J \cdot dS = 0$$

$$\nabla \cdot J = 0$$

构成了恒定电场的基本方程之一。而 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ 也决定了恒定电场具有与静电场相同的特性——保守性。

因此得到恒定电场的基本方程为

积分形式:	微分形式:	本构关系:
$\begin{cases} \oint_S J \cdot dS = 0 \\ \oint_C E \cdot dl = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla \cdot J = 0 \\ \nabla \times E = 0 \end{cases}$	$J = \sigma E$

电位方程

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

及边界条件

$$\begin{cases} J_{1n} = J_{2n} \\ E_{1t} = E_{2t} \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \\ \Phi_1 = \Phi_2 \end{cases}$$

求解恒定电场的方法如下:

(1) 电流法: 设媒质中电流分布为 J , 得 $E = J/\sigma$, 利用 $U = \int_l E \cdot dl$ 及边界条件求出 J , 进而可得 E , 及 $I = \int_S J \cdot dS$, 还可求出 $G = I/U$; 或者直接求解 $\nabla^2 \Phi = 0$, 得到 $E = -\nabla \Phi$ 及 $J = \sigma E$ 。

(2) 静电比拟法: 将媒质看做介电常数为 ε 的完纯介质, 完全按静电场方程求出 $E(\varepsilon)$ 、 $\Phi(\varepsilon)$ 及 $Q(\varepsilon)$ 、 $C(\varepsilon)$, 再由静电比拟关系, 将各表达式中的 ε 换成 σ , 即可得到恒定

电场中的 $E(\sigma)$ 、 $\Phi(\sigma)$ 及 $J(\sigma)$ 、 $G(\sigma)$ 。

(3) 恒定电场中电荷分布的计算如下。

已知恒定电场的场分布为 E 时, 可求出媒质中的电位移矢量 $D = \varepsilon E$, 及 $P = (\varepsilon - \varepsilon_0)E$, 于是可得

媒质中自由体电荷

$$\rho_f = \nabla \cdot D$$

媒质中束缚体电荷

$$\rho_p = -\nabla \cdot P$$

$$\text{两导电媒质分界面上自由面电荷} \quad \rho_s = n \cdot (D_1 - D_2)|_s = -\varepsilon_1 \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right|_s + \varepsilon_2 \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right|_s$$

$$\text{两导电媒质分界面上束缚面电荷} \quad \rho_{ps} = n \cdot (P_2 - P_1)|_s$$

$$\text{理想电极表面的面电荷} \quad \rho_s = n \cdot D|_s = -\varepsilon \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_s$$

习 题 三

3.1 半径为 a 的均匀极化介质球以它的一条直径为轴匀速旋转, 角速度为 ω , 该轴平行于球的极化强度为 P , 求:

(1) 由于旋转形成的面电流密度分布;

(2) 通过球面上 $\varphi = \varphi_0$ 的半圆周也即球的一条“经线”的总电流;

(3) 通过这条“经线”的上半段 ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) 和下半段 ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi$) 的电流分别是多少?

3.2 如题 3.2 图所示的平行板电容器中充满线性介质, σ 是常数, $\frac{\varepsilon}{\sigma} = ax + b$ (a 、 b 为常数)。若已知电容器中恒定漏电流为 J_x , 求电容器中的电荷密度 ρ_f 。

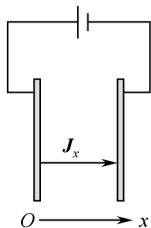
3.3 内、外导体半径分别为 a 和 b 的同轴电缆, 内、外导体之间填充两层电容率分别为 ε_1 和 ε_2 、电导率分别为 σ_1 和 σ_2 的介质, 介质分界面半径为 c 。当外加电压为 U 时, 求两种介质中的电场及分界面上的自由电荷密度。

3.4 内、外导体半径分别为 a 和 b 的同轴电缆, 内、外导体之间以过轴线的平面为分界面, 一半填充电容率为 ε_1 、电导率为 σ_1 的媒质, 一半填充电容率为 ε_2 、电导率为 σ_2 的媒质, 求该电缆单位长度的电容和漏电导以及单位长度储存的电能和损耗功率。

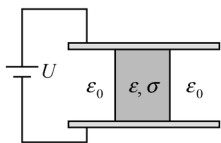
3.5 设半径为 R_1 和 R_2 的两个同心球面之间填充着 $\sigma = \sigma_0 \left(1 + \frac{K}{R}\right)$ 的材料, K 为常数, 求两球面之间的电阻。

3.6 如题 3.6 图所示的平行板电容器, 极板面积为 S , 板间距离为 d 。两极板之间正中间三分之一的空间填充电容率为 ε 、电导率为 σ 的介质, 两边各三分之一的空间是空气。当外加电压为 U 时, 求该电容器的电容和漏电导。

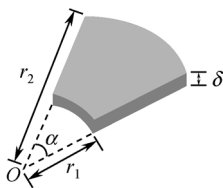
- 3.7 如题 3.7 图所示的扇形薄金属片, 电导率为 σ , 厚度为 δ , 扇角为 φ , 内、外半径分别为 r_1 和 r_2 。分别求沿厚度方向的电阻 R_0 、两弧面间的电阻 R 和两个直边之间的电阻 R' 。



题 3.2 图



题 3.6 图



题 3.7 图

- 3.8 闪电在 $t=0$ 时刻击中一个半径为 $a=0.1\text{ m}$ 的有耗介质球 ($\sigma=10\text{ S/m}$, $\epsilon_r=1.2$), 把 1 mC 的电荷散落在球上。假设 $t=0$ 时刻时电荷在球内均匀分布, 求电荷从体积内扩散到表面上的暂态过程中任意时刻的电场强度和电流密度分布。
- 3.9 在电导率为 σ 的无限大均匀漏电介质里有两个导体小球, 半径分别为 r_1 和 r_2 , 小球间距为 d ($d \gg r_1, d \gg r_2$, 即两球之间的静电感应可以忽略), 求两小球间的电阻 R 。
- 3.10 一个半径为 a 的导体球接地器埋入地下, 球心距地面为 h ($h > a$), 考虑到地面的影响, 求该接地器的接地电阻, 设土壤的电导率为 σ 。
- 3.11 厚度为 d 的无限大均匀导电媒质板上垂直地插有两根无限长金属圆柱形电极, 两圆柱的轴线相距为 D , 半径为 a , $D \gg a$; 两电极间电压为 U , 求两电极之间的电流。
- 3.12 半径为 a , 长为 l 的管形接地器直立于电导率为 σ 的土壤中, 管口与地面平齐, 考虑地面影响, 求该接地器的接地电阻 R 。
- 3.13 在很深的湖底上方高为 h 处悬浮着一根半径为 a 的极长的直导线, 导线平行于湖底, $h \gg a$ 。假设湖底为良导体平面, 湖水电导率为 σ , 求单位长度的导线与湖底之间的电阻。

第4章

恒定磁场

永磁体和恒定电流产生的磁场都称为恒定磁场，本章主要讨论恒定电流产生的磁场。

在本书的第2、3章曾指出，静止的电荷分布产生静电场，恒定的电流场中虽有电荷在运动，但其电荷分布是恒定的，因而，它呈现出的电效应与静止电荷相同。而磁场正是反映了电荷的运动所带来的效应，这种具有定向运动速度的电荷所形成的电流是产生磁场的涡旋源。它与产生静电场的静止电荷是两种不同性质的源，但静电场和恒定磁场的许多定律和公式在形式上是对偶的或对应的，因此，对照静电场的分析方法，本章将依次介绍恒定磁场的安培力定律、磁场的基本物理量、基本方程和边界条件；对应于静电场的电位，简化磁场计算的方法可采用矢量磁位和标量磁位；最后介绍恒定磁场的基本问题，包括电感、磁场能量和磁场力等的计算。

➔ 4.1 安培力定律、磁感应强度

4.1.1 安培力定律

磁场的最基本特征是对运动的电荷有作用力。

实验表明，两个载流回路之间存在相互作用力。如图4-1所示，真空中载有电流 I_1 的回路 C_1 对另一载有电流 I_2 的回路 C_2 的作用力可表示为

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{a}_R)}{R^2} \quad \text{N} \quad (4.1.1)$$

式中， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ ，是真空的磁导率； $I_1 d\mathbf{l}_1$ 、 $I_2 d\mathbf{l}_2$ （单位为Am）称为线电流的电流元矢量； R 是 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 到 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的距离； \mathbf{a}_R 是 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 指向 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的单位矢量。该式是法国物理学家安培经过大量精巧实验总结出来的，称为**安培力定律**。可以证明， $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ ，即电流回路之间的作用力符合牛顿第三定律。

从数学上分析安培力定律，可以得出任意电流元1对电流元2的作用力为

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{a}_R)}{R^2} \quad (4.1.2)$$

由于电流元并不能单独存在，因此，通常情况下，电流元之间的作用力并不满足牛顿第三定律，即 $d\mathbf{F}_{12} \neq d\mathbf{F}_{21}$ 。

安培力定律是恒定磁场的重要定律, 其地位与库仑定律在静电场中的地位相当。

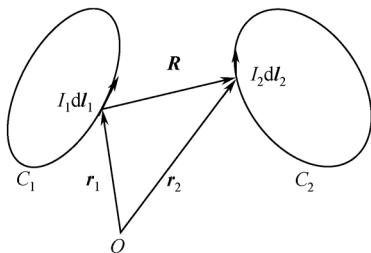


图 4-1 载流导线回路之间的作用力

4.1.2 磁感应强度、毕奥—沙伐定律

在式 (4.1.2) 中, 二重积分的积分变量各自独立, 故可将该式改写为

$$\mathbf{F}_{12} = \oint_{C_2} I_2 d\mathbf{l}_2 \times \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{a}_R}{R^2} = \oint_{C_2} I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 \quad (4.1.3)$$

以现代磁学的观点, 式 (4.1.3) 所表示的作用力可解释为电流回路 C_1 在空间产生磁场, 该磁场对电流回路 C_2 产生了作用力。于是, 一般地, 通流 I 的回路 C 的磁场可写为

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l}' \times |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (4.1.4)$$

式中, \mathbf{B} 称做**磁感应强度**, 也称做**磁通密度**, 单位为 T (特斯拉), 也可用 Wb/m^2 (韦伯/米²) 或 Gs (高斯) 表示, $1\text{T} = 1\text{Wb/m}^2 = 10^4\text{Gs}$ 。注意, 电流回路 C 上各点的坐标用带撇的符号 (\mathbf{r}') 表示, 空间场点的坐标用不带撇的符号 (\mathbf{r}) 表示。

式 (4.1.4) 还可写为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3} = \oint_C d\mathbf{B} \quad (4.1.5)$$

其中,

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{a}_R}{R^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I d\mathbf{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \quad (4.1.6)$$

式 (4.1.6) 称为**毕奥—沙伐 (Biot-Savart) 定律**。

分析式 (4.1.5) 和式 (4.1.6) 可得出以下结论:

- (1) 磁感应强度与距离平方成反比, 与电流强度成正比, 场强服从叠加原理;
- (2) $d\mathbf{B}$ 垂直于 $I d\mathbf{l}' \times \mathbf{a}_R$, 即电流元 $I d\mathbf{l}'$ 产生的磁场是以 $I d\mathbf{l}'$ 所在直线为轴线的同心圆。在这点上与静电场的规律完全不同, 电荷产生的电场 $d\mathbf{E}$ 是以 dq 为球心发出的径向射线; 而电流元产生的磁场则是以 $I d\mathbf{l}'$ 为轴线的涡旋状闭合曲线, 如图 4-2 所示。

若考虑到电流的实际分布, 可将毕奥—沙伐定律推广到分布电流情形。如图 4-3 所示, 对体电流元: $I d\mathbf{l}' = (\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}') d\mathbf{l}' = \mathbf{J} d\boldsymbol{\tau}'$, 在真空中产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J} d\boldsymbol{\tau}' \times \mathbf{a}_R}{R^2} \quad (4.1.7)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{a}_R}{R^2} d\tau' \quad (4.1.8)$$

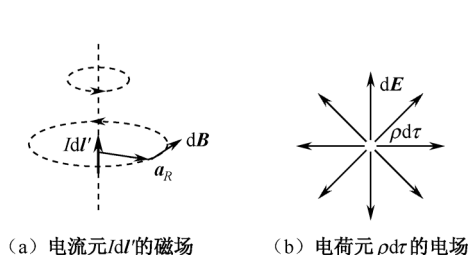


图 4-2 电流元的磁场和电荷元的电场

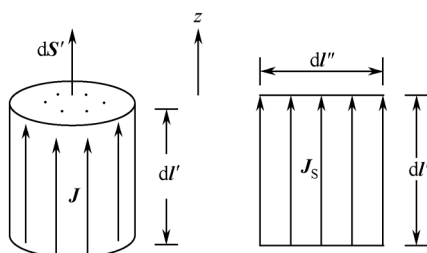


图 4-3 体电流元与面电流元

对面电流元: $Idl' = J_s dl'' dS' = J_s dS'$, 在真空中产生的磁感应强度为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}_s dS' \times \mathbf{a}_R}{R^2} \quad (4.1.9)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\mathbf{J}_s \times \mathbf{a}_R}{R^2} dS' \quad (4.1.10)$$

4.1.3 洛伦兹力

电流是运动的电荷, 因此运动的电荷在磁场中的受力可通过安培力定律推导出来。利用式 (4.1.3), 电流元 $Idl = Jd\tau$ 在磁场 \mathbf{B} 中受到的安培力为

$$d\mathbf{F} = Jd\tau \times \mathbf{B}$$

若电流元中运动电荷的速度为 \mathbf{v} , 电荷体密度为 ρ , 则由 $Jd\tau = \rho v d\tau = dq\mathbf{v}$ 推知点电荷 q 在磁场中受到的力为

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.1.11)$$

这种运动的电荷在磁场中受到的作用力称为**洛伦兹力**。

如果空间同时还存在电场, 则电荷 q 还会受到电场力的作用。这样, 带电 q 以速度 \mathbf{v} 运动的点电荷在外加电磁场中受到的总作用力应为

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.1.12)$$

根据电场强度的普适定义式, 由式 (4.1.12) 可得

$$\mathbf{E}_{\text{总}} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{E} + \mathbf{E}_v$$

其中,

$$\mathbf{E}_v = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.1.13)$$

称为**动生电场**。从式 (4.1.11) ~ 式 (4.1.13) 可以看出电场和磁场之间的联系和相对性:

(1) 静止的电荷产生静电场, 运动的电荷产生运动的电场; (2) 运动的电荷即电流产生磁场, 因此, 运动的电场具有磁效应; (3) 磁场只对在场中运动的电荷有力的作用, 而电场对一切运动和静止的电荷均有力的作用, 因此, 磁场力实际上是一个运动的电荷所受到的另外的运动电荷的电场力的一部分。式 (4.1.12) 中, 与受力电荷运动速度无关

的部分 $q\mathbf{E}$ 就是通常所说的电场力, 而与受力电荷的运动速度有关的部分 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 是通常所说的磁力。

下面通过几个例子, 具体讨论毕奥—沙伐定律求解磁感应强度的应用。

例 4.1 一段长为 l 的直导线通有电流 I , 求空间各点的磁感应强度。

解 如图 4-4 所示建立圆柱坐标系, 使 z 轴与直导线相合, 导线的中点取做原点。由于电流分布具有轴对称性, 场分布与 φ 坐标无关, 可将场点坐标设为 $P(\rho, 0, z)$; 在导线上任取一小段电流元 $Idl' = \mathbf{a}_z Idz'$, 即源点坐标为 $(0, 0, z')$, 则由图中几何关系可写出

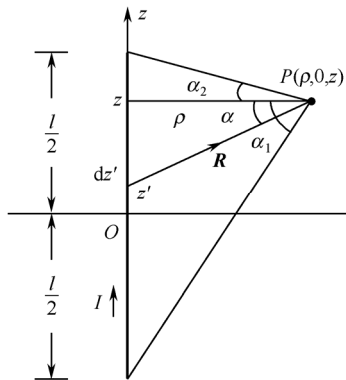


图 4-4 直线电流产生的 \mathbf{B} 的计算

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_\rho \cos \alpha + \mathbf{a}_z \sin \alpha$$

$$R = \rho \sec \alpha$$

$$z' = z - \rho \tan \alpha$$

及

$$dz' = -\rho \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$Idl' = -\mathbf{a}_z I \rho \sec^2 \alpha d\alpha$$

$$Idl' \times \mathbf{a}_R = -\mathbf{a}_\varphi I \rho \sec^2 \alpha \cos \alpha d\alpha$$

把以上各式代入 (4.1.5) 式, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Idl' \times \mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{-\mathbf{a}_\varphi \rho \sec^2 \alpha \cos \alpha d\alpha}{\rho^2 \sec^2 \alpha} \\ &= \mathbf{a}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -\cos \alpha d\alpha = \mathbf{a}_\varphi \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) \end{aligned}$$

对于无限长直线电流, $l \rightarrow \infty$, $\alpha_1 \rightarrow \pi/2$, $\alpha_2 \rightarrow -\pi/2$, 有

$$\therefore \mathbf{B} = \mathbf{a}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad (4.1.14)$$

这个结果与无限长直线电荷产生的电场 $\mathbf{E} = \mathbf{a}_\rho \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0 \rho}$ 形式上相对应。电力线的形状是以无限长线为轴线的辐射状分布, 而磁力线则是以无限长线为轴线的同心圆。二者都

是平行平面场，也就是既没有 z 分量，也与 z 坐标无关的场。

例 4.2 求半径为 a 、通以电流为 I 的细圆环在轴线上任一点的磁感应强度。

解：如图 4-5 所示建立圆柱坐标系，取圆环的轴线为 z 轴，并使圆环位于 $z=0$ 的平面上。场点 P 的坐标为 $(0, 0, z)$ 。在圆环上取电流元

$$Idl' = a_{\varphi} I a d\varphi'$$

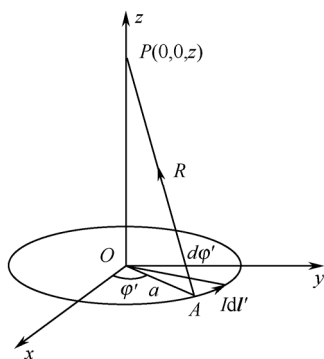


图 4-5 圆环电流轴线上的磁场

由源点 A 处的位置矢量 $\mathbf{r}' = \mathbf{a}_{\rho} a$ 和场点 P 处的位置矢量 $\mathbf{r} = \mathbf{a}_z z$ ，可得

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{a}_z z - \mathbf{a}_{\rho} a$$

及

$$Idl' \times \mathbf{R} = \mathbf{a}_{\rho} I a z d\varphi' + \mathbf{a}_z I a^2 d\varphi'$$

把以上各式代入 (4.1.5) 式，得

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Idl' \times \mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{a}_{\rho} a z d\varphi' + \mathbf{a}_z a^2 d\varphi'}{R^3}$$

其中， \mathbf{a}_{ρ} 分量对 φ' 的积分结果为 0（关于原点对称的任意两个径向方向相反且互相抵消），于是

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\varphi'}{R^3} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (4.1.15)$$

在圆环的环心 $z=0$ 处，则有

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_z \frac{\mu_0 I}{2a} \quad (4.1.16)$$

本节思考与练习

- 4.1 运动电荷、载流导线以及闭合电流回路在恒定磁场中受到的力有何不同？
- 4.2 线电荷密度为 ρ_l 的带电线段 AB 绕 BA 延长线上的一点 O 以角速度 ω 匀速转动。 O 点距 B 点和 A 点分别为 b 和 a ($b > a$)，求 O 点的磁感应强度。

4.3 两根无限长直线电流 I_1 和 I_2 互相平行, 相距为 d 。求每根导线单位长度所受的力。

4.2 真空中磁场的基本方程

与静电场一样, 要研究恒定磁场的基本方程, 就需要研究恒定磁场的通量和散度以及环量和旋度。

4.2.1 磁通连续性方程

磁感应强度或磁通密度 \mathbf{B} 穿过曲面 S 的通量称为**磁通量**, 用 Φ 表示为

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.2.1)$$

磁通的单位是 Wb (韦 [伯])。磁通是电磁学中一个重要的物理量。感应电动势、电感、磁场能量及电流回路在磁场中受力的计算等等, 都与一个回路包围的磁通有关。

如果 S 为闭合曲面, 则有

$$\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.2.2)$$

下面以载流回路 C 产生的磁场为例, 计算恒定磁场对一个闭合曲面的通量。利用式 (4.1.5), 有

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{a}_R}{R^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I d\mathbf{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \quad (4.2.3)$$

将式 (4.2.3) 代入式 (4.2.2), 并利用矢量恒等式 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, 得

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I d\mathbf{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \cdot d\mathbf{S} = -\oint_C \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\mathbf{l}' \cdot \oint_S \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times d\mathbf{S}$$

利用矢量恒等式

$$\int_\tau \nabla \times \mathbf{A} d\tau = \oint_S -\mathbf{A} \times d\mathbf{S}$$

可得

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\mathbf{l}' \cdot \oint_\tau \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) d\tau$$

因为

$$\nabla \times \nabla \left(\frac{1}{R} \right) = 0$$

于是

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4.2.4)$$

式 (4.2.4) 表明, 穿入闭合面的磁通量和穿出闭合面的磁通量相等, 因而总和为零, 即磁通是连续的。该式称为**磁通连续性方程的积分形式**。

再利用散度定理, 可得到

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.2.5)$$

式(4.2.5)表明,磁场中没有“喷泉”或“漏口”,即没有散度源,是无散场。因此,磁力线是无头无尾、永不相交的闭合回线。该式称为**磁通连续性方程的微分形式**。

磁通连续性是普遍性的原理,对时变电磁场也成立。

4.2.2 安培环路定律

仍以载流回路的磁场为例,计算该磁场对任意回路的环量。为区别两个回路,电流回路用 C' 表示,环量的积分路径用 C 表示。

由式(4.1.5),电流回路 C' 产生的磁场为

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{a}_R}{R^2}$$

在该磁场中任取一个积分回路 C , 如图 4-6 (a) 所示, 计算 \mathbf{B} 的环量为

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{I d\mathbf{l}' \times \mathbf{a}_R}{R^2} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} -\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \cdot (-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}') \quad (4.2.6)$$

式中利用了矢量恒等式 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$ 。

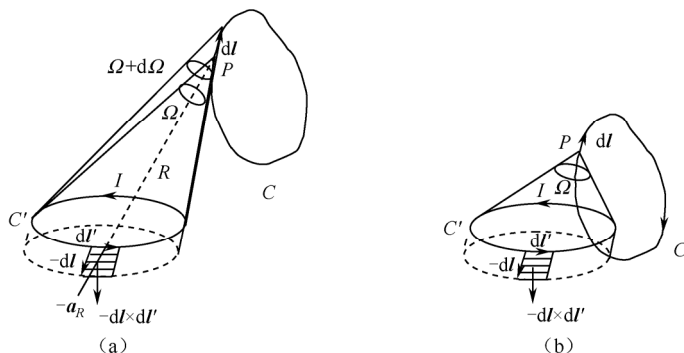


图 4-6 \mathbf{B} 的环量计算中立体角的计算

设 P 是积分路径 C 上的场点, 则载流回路 C' 所包围的表面对 P 点张开一个立体角, 设为 Ω 。当 P 点沿着 C 位移 $d\mathbf{l}$ 时, 该立体角会产生一个增量 $d\Omega$ 。显然, 从相对位置看, 若 P 点保持不动而回路 C' 位移 $-d\mathbf{l}$ 引起的立体角增量也为 $d\Omega$, 且按照立体角的定义, 这个增量立体角由增量面积确定。这个增量面积即是图 4-6 (a) 中所示的环形带状曲面, 其矢量面元为 $-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}'$, 注意到立体角的定义中点 P 到面元的单位方向在图 4-6 (a) 中可用 $-\mathbf{a}_R$ 表示, 于是可得

$$d\Omega = \oint_{C'} -\frac{\mathbf{a}_R}{R^2} \cdot (-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}')$$

将上式代入式(4.2.6), 得

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C d\Omega = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Delta\Omega \quad (4.2.7)$$

其中, $\Delta\Omega$ 是 \mathbf{B} 沿 C 积分一周所引起的立体角的增量。如图 4-6 所示, C 和 C' 有两种可

能的相对位置。

(1) 积分回路 C 不与场源回路 C' 交链。

可以看出, 当 P 从某点开始沿 C 绕行一周回到始点时, 立体角又恢复到原来的值, 故 $\Delta\Omega = 0$, 从而式 (4.2.7) 变为

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

(2) 积分回路 C 与电流回路 C' 相交链, 即 C 穿过 C' 包围的曲面 S' , 如图 4-6 (b) 所示。当场点 P 按图示方向沿回路 C 绕行一周时, 增量面积也即 P 点不动 C' 反向位移一周时所扫过的面积显然是一个包围 P 点的闭合曲面。在图 4-5 (b) 所示的 C 和 C' 的绕行方向下 (C 和 C' 为右手关系套链), 增量面积 ($-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}'$) 确定的方向是闭合面的外法线方向, 于是 $\Delta\Omega = 4\pi$ 。从而式 (4.2.7) 变为

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 4\pi = \mu_0 I \quad (4.2.8)$$

若 C 和 C' 为左手关系套链, 即 $d\mathbf{l}$ 方向与图 4-6 (b) 所示方向相反, 则增量面积 $-d\mathbf{l} \times d\mathbf{l}'$ 确定的方向是闭合面的内法线方向, 于是 $\Delta\Omega = -4\pi$ 。从而式 (4.2.7) 变为

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 I \quad (4.2.9)$$

综合式 (4.2.8) 和式 (4.2.9), 当积分回路 C 交链多个电流时, 有下式成立:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I \quad (4.2.10)$$

其中, $\sum I$ 是积分回路 C 所交链的电流的代数和, 电流方向与 C 成右手螺旋关系时取“+”, 否则取“-”。

式 (4.2.10) 称为**安培环路定律的积分形式**。它表明在真空中, 磁感应强度沿任意回路的环量等于真空磁导率乘以与该回路相交链的总电流。对于分布电流, 有

$$\sum I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

利用斯托克斯定理

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$$

可得

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

于是得到安培环路定律的微分形式:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.2.11)$$

式 (4.2.11) 称为**安培环路定律的微分形式**。它表明恒定磁场的磁感应强度的旋度等于该点的电流密度与真空磁导率的乘积, 也就是说恒定磁场的涡旋源是电流。

综上所述, 可得到真空中恒定磁场的基本方程为

	积分形式	微分形式
磁通连续性方程:	$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
安培环路定律:	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$

可见, 与静电场是有散无旋场、保守场不同, 恒定磁场是无散有旋场、非保守场。在电流分布具有某些特殊的对称性时, 例如无限长的载流直导线、无限长的载流圆柱体、无限大的均匀电流面等, 通过适当选取坐标系, 可使磁通连续性方程自动满足, 这时只要利用安培环路定律的积分形式就可以计算 \mathbf{B} 的分布。反过来, 若已知磁场分布, 也可利用安培环路定律的微分形式求出电流分布。

例 4.3 半径为 a 的无限长直圆柱导体通过电流 I , 计算导体内外的 \mathbf{B} 。

解: 电流分布具有轴对称性, 选柱坐标。场的分布与 φ 和 z 无关, 磁感应线是围绕直圆柱导体轴线的同心圆, 沿磁感应线取 \mathbf{B} 的线积分, 有

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi\rho = \mu_0 \sum I$$

$\rho \leq a$ 时,

$$\begin{aligned} \sum I &= \pi\rho^2 J = I \frac{\rho^2}{a^2} \\ \therefore B_\varphi &= \frac{\mu_0}{2\pi\rho} I \frac{\rho^2}{a^2} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2} \end{aligned}$$

$\rho > a$ 时, 回路中包围的电流为 I , 故有

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

这与沿无限长直导线积分所得的结果式 (4.1.14) 相同。

例 4.4 两个相交的圆柱, 半径相同 (均为 a), 两圆心相距为 c , 通过强度相等且方向相反的电流 I , 因而相交的部分 $\mathbf{J} = 0$, 如图 4-7 所示。证明相交的区域中是匀强磁场。

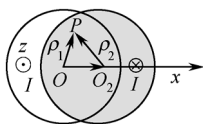


图 4-7 流过相反电流的两个相交圆柱

解: 在相交区域任取一场点 P , 分别计算两圆柱电流单独存在时的磁感应强度。

由上例, 两圆柱单独存在时, 每个圆柱内的磁感应强度为

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 I \frac{\rho_1^2}{a^2} \\ B_1 &= a_{\varphi_1} \frac{\mu_0}{2\pi\rho_1} I \frac{\rho_1^2}{a^2} = \mathbf{a}_z \times \rho_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \\ \oint_C \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{l} &= -\mu_0 I \frac{\rho_2^2}{a^2} \\ B_2 &= -\mathbf{a}_{\varphi_2} \frac{\mu_0}{2\pi\rho_2} I \frac{\rho_2^2}{a^2} = -\mathbf{a}_z \times \rho_2 \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \end{aligned}$$

$\mathbf{a}_{\varphi 1}$ 与 $\mathbf{a}_{\varphi 2}$ 分别是以 O_1 和 O_2 为轴心的圆柱坐标系中的单位矢量, 相交区域中的 \mathbf{B} 为 \mathbf{B}_1 和 \mathbf{B}_2 的叠加:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \mathbf{a}_z \times (\rho_1 - \rho_2) \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} = \mathbf{a}_z \times \mathbf{c} \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} = \mathbf{a}_y \frac{\mu_0 c I}{2\pi a^2}$$

其中, \mathbf{c} 为两个圆心连线的矢量, 方向从 O_1 指向 O_2 。可见 \mathbf{B} 与场点坐标无关, 故为均匀场, 方向与 \mathbf{c} 和 z 轴垂直, 即为 y 方向。当两圆柱轴线相距很近时, 相交部分将近似于一个圆柱。

本节思考与练习

4.4 在什么条件下可以利用安培环路定律求解恒定磁场?

4.5 无限大平面上均匀分布面电流 \mathbf{J}_S , 求此平面两侧的磁感应强度。

➔ 4.3 矢量磁位

4.3.1 矢量磁位

恒定磁场的基本方程表明磁场是有旋场, 因而磁场中不能无条件地引入标量位; 但磁场的无散性为简化磁场的计算提供了另一条思路。由矢量恒等式可知, 一个无散场总可以表示成另外一个矢量场的旋度, 故可令

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.3.1)$$

其中, \mathbf{A} 称为**矢量磁位**或**矢量位**, 单位为 $\text{T} \cdot \text{m}$ (特·米) 或 Wb/m (韦/米)。

需要指出的是, 满足 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 的矢量场 \mathbf{A} 并不是唯一的。它仅仅规定了矢量场 \mathbf{A} 的旋度, 而 \mathbf{A} 的散度可以任意假定。假设 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi$, Ψ 是一个任意的标量场, 则有

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla \Psi = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

可见, 凡与 \mathbf{A} 相差任一个梯度场的矢量场 \mathbf{A}' 的旋度都是 \mathbf{B} , 但是它们的散度却可能各不相同。因而, 为了唯一确定 \mathbf{A} , 可以通过限定 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 来选择。对 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 的值的指定, 称为一种规范。在恒定磁场中, 选取矢量磁位的散度为零较为方便, 即

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.3.2)$$

式 (4.3.2) 称为**库仑规范**。

将式 (4.3.1) 代入式 (4.2.11)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

利用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, 并代入库仑规范, 有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (4.3.3)$$

式 (4.3.3) 即是矢量磁位 \mathbf{A} 满足的微分方程, 称为**矢量磁位的泊松方程**。对于 $\mathbf{J} = 0$ 的无源区, 矢量磁位满足**矢量拉普拉斯方程**, 即

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (4.3.4)$$

将直角坐标系中的 ∇^2 代入式 (4.3.3), 有

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{a}_x A_x + \mathbf{a}_y A_y + \mathbf{a}_z A_z = -\mu_0 \mathbf{J}$$

可得到对应分量的三个标量泊松方程:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu_0 J_z \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

式 (4.3.5) 的三个方程是标量的泊松方程, 对照静电场中电位的泊松方程的解, 可以得到 \mathbf{A} 的各个分量的解为

$$\begin{cases} A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{J_x}{R} d\tau' \\ A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{J_y}{R} d\tau' \\ A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{J_z}{R} d\tau' \end{cases}$$

将上式各分量合成矢量形式, 即为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\tau' \quad (4.3.6)$$

实际计算时, 一般先写出

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau'}{R} \quad (4.3.7)$$

显然, 电流元 $\mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau'$ 与其产生的矢量位 $d\mathbf{A}$ 平行, 因而 \mathbf{A} 的矢线也是与场源电流相平行的矢线。对一些常见的电流分布, 在选择适当的坐标系下, \mathbf{A} 往往只有一个分量, 而 \mathbf{B} 一般不止一个分量, 因此, 利用矢量位可以简化 \mathbf{B} 的计算。

对于面电流和线电流, 与式 (4.3.6) 和式 (4.3.7) 对应的矢量位分别为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_S(\mathbf{r}')}{R} dS' \quad d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}_S(\mathbf{r}')}{R} dS' \quad (4.3.8)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I d\mathbf{l}'}{R} \quad d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}'}{R} \quad (4.3.9)$$

例 4.5 计算通过电流为 I 、半径为 a 的小圆环在远离圆环处的磁场。

解: 当场点偏离圆环的轴线时, 直接用式 (4.1.5) 计算磁感应强度 \mathbf{B} 比较困难。可以通过求矢量位 \mathbf{A} 来计算 \mathbf{B} 。电流具有轴对称性, 但在远场点, $r \gg a$, 小圆环相当于一个点, 所以采用球坐标。

将圆环的圆心置于球坐标原点, 取圆环的轴线为 z 轴, 如图 4-8 (a) 所示。显然场是轴对称的, \mathbf{A} 与 φ 坐标无关, 故将场点 P 放在 $\varphi = 0$ 的平面上并不失一般性。

利用式 (4.3.9), 载流环上任一线电流元 $I d\mathbf{l}'$ 在场点 $P(r, \theta, 0)$ 处产生的矢量磁位为

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l}'}{R}$$

及

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mathbf{a}_r}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\mathbf{a}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \\ &\approx \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^3} (\mathbf{a}_r 2 \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \sin \theta) \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

一般来说, 作为一个求解工具, 矢量磁位在恒定磁场中远不像标量电位在静电场中那样有用, 但它在时变场的复杂情况下却是十分有用的, 是计算磁场的最重要的辅助函数。例如在适当的坐标系中, \mathbf{A} 的矢量波动方程可分解为标量波动方程来解。而围绕着求解标量波动方程已发展出许多种解析方法或数值解法。如果不通过位函数而直接求解场矢量的波动方程, 将是十分复杂的。

4.3.2 磁偶极子

将例 4.5 中小圆电流环在远场区的磁感应强度的表示式

$$\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^3} (\mathbf{a}_r 2 \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \sin \theta)$$

与静电场中电偶极子在远场区的电场表示式

$$\mathbf{E} \approx \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{a}_r 2 \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \sin \theta)$$

进行比较, 可以看出二者非常相似, 因此将载有恒定电流的小圆环称为**磁偶极子**。乘积 IS 称为磁偶极子的**磁偶极矩**, 简称为**磁矩**, 单位为 $\text{A} \cdot \text{m}^2$ (安·米²), 用矢量 \mathbf{p}_m 表示为

$$\mathbf{p}_m = IS \quad (4.3.12)$$

其中, \mathbf{S} 或 \mathbf{p}_m 的方向与电流 I 的方向成右旋关系, 如图 4-9 所示。

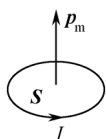


图 4-9 磁偶极子

由于表达式形式相同, 式 (4.3.11) 所示的磁偶极子的远区磁感应线的分布与电偶极子的远区电力线分布也是相同的, 如图 4-10 所示。但是在近区二者的解并不相同, 而且它们之间有一个根本的不同点: 电力线都是起始于电偶极子的正电荷, 终止于负电荷; 而磁力线则是与小电流环交链的闭合曲线。

利用矢量恒等式, 式 (4.3.10) 的矢量磁位表达式还可写为

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \mathbf{a}_\varphi \frac{\mu_0 I S \sin \theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I S}{4\pi} \mathbf{a}_z \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{p}_m \times \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \quad (4.3.13)$$

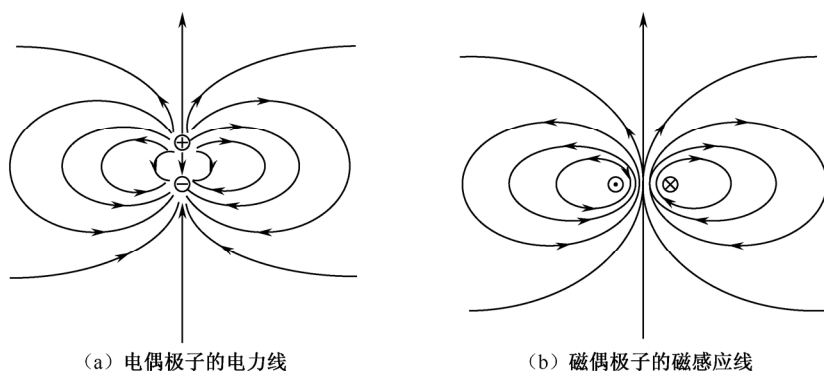


图 4-10 电偶极子和磁偶极子

本节思考与练习

4.6 证明磁偶极子的矢量磁位 $\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \frac{\mathbf{p}_m}{r}$ 。

4.7 利用上一题的结论, 进一步证明任意电流回路 I 的磁感应强度 $\mathbf{B} = -\nabla \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \Omega \right)$ 。

其中 Ω 是该电流回路所围成的面积对场点所张的立体角。

4.8 利用上一题结论求半径为 a 且通流为 I 的圆环电流在轴线上任一点产生的磁感应强度 \mathbf{B} 。

➔ 4.4 磁介质中的安培环路定律

4.4.1 介质的磁化

除了真空以外, 所有物质在恒定磁场中都会被磁化。被磁化的介质产生的磁场叠加在原磁场上, 使其增强或削弱。介质被磁化的机理通常采用分子电流模型(安培模型)来解释。

在微观上, 介质分子中的每个电子和原子核都在自旋, 电子同时还绕核旋转, 这些都相当于小环电流的磁偶极矩, 其矢量和就是一个分子的磁矩。因此, 从磁效应上看, 每个介质分子可等效成一个磁矩为 $\mathbf{p}_{mi} = I_i \mathbf{S}_i$ 的磁偶极子, 其中 I_i 是等效的分子电流强度, \mathbf{S}_i 是分子电流围成的面积, \mathbf{S}_i 的方向与电流环绕方向满足右手螺旋关系。由于分子电流是束缚在分子里的, 不像自由电流形成的宏观电流那样能被测量到, 因而也叫做**束缚电流**或**磁化电流**。

在没有外加磁场时, 由于热运动, 分子磁矩排列随机, 总磁矩为零, 整块物质对外不显磁性。当外加磁场时, 分子中一直处于运动状态的带电粒子受到磁场力作用而改变

运动方向,从而使得分子磁矩的排列趋于有序,宏观上显现磁效应,这种现象称为介质的**磁化**。被磁化的物质产生附加磁场,叠加到外磁场中,使物质的磁化状态再次发生变化,直至达到稳定状态。

不同的物质被磁化的程度不同,顺磁性物质如铝、锡、镁、钨、铂、钽等被磁化后合成磁场略有增大,抗磁性物质如银、铜、铋、锌、铅、汞等被磁化后合成磁场略有减小,这些都属于弱磁性物质;而铁磁性物质如铁、钴、镍和亚铁磁性物质如铁氧体等在外加磁场中会被显著磁化,产生较强的磁性,而且这种磁性具有非线性特性,并存在磁滞和剩磁现象,因而得到广泛应用。

为了从宏观上描述介质的磁化程度,引入**磁化强度** \mathbf{M} , 定义为

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{mi}}{\Delta\tau} \quad \text{A/m} \quad (4.4.1)$$

其中, n 是体积 $\Delta\tau$ 内的分子数, \mathbf{p}_{mi} 是第 i 个分子的磁偶极矩, \mathbf{M} 表示介质内某点处单位体积的总磁矩,是一个分布函数,单位是 A/m (安/米)。若 N 为分子密度, \mathbf{p}_m 为平均磁矩,则应有

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{n\mathbf{p}_m}{\Delta\tau} = N\mathbf{p}_m \quad \text{A/m} \quad (4.4.2)$$

若已知介质的磁化强度为 \mathbf{M} , 如图 4-11 所示, 则介质中体积元 $d\tau'$ 内的总磁矩为 $\mathbf{M}d\tau' = N\mathbf{p}_m d\tau'$, 利用式 (4.3.13), 这个磁矩在场点 P 产生的矢量位为

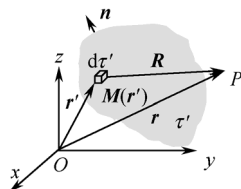


图 4-11 磁化介质的场

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} N\mathbf{p}_m \times \left(\nabla \frac{1}{R} \right) d\tau' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla \frac{1}{R} \right) d\tau'$$

整块介质的磁矩产生的矢量位为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla \frac{1}{R} \right) d\tau' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \left(\nabla' \frac{1}{R} \right) d\tau'$$

利用矢量恒等式

$$\mathbf{M} \times \left(\nabla' \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R} \nabla' \times \mathbf{M} - \nabla' \times \frac{\mathbf{R}}{R}$$

及

$$-\int_{\tau'} \nabla' \times \frac{\mathbf{M}}{R} d\tau' = \oint_{S'} \frac{\mathbf{M}}{R} \times \mathbf{n} dS'$$

得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{S'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}}{R} dS' \quad (4.4.3)$$

把式(4.4.3)与式(4.3.6)和式(4.3.8)对照,可以看出 $\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')$ 和 $\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}$ 分别对应着体电流密度和面电流密度,若分别用 \mathbf{J}_m 和 \mathbf{J}_{mS} 表示,并略去符号上的撇('),则有

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (4.4.4)$$

$$\text{束缚面电流密度} \quad \mathbf{J}_{mS} = \mathbf{M} \times \mathbf{n} \quad (4.4.5)$$

其中, \mathbf{n} 是磁介质表面的外法线方向。这样,磁化介质的磁效应就可用束缚体电流和束缚面电流来代替。

综合以上讨论,可得出下面的结论:

(1) 对均匀、线性、各向同性介质,当外加磁场均匀时,介质将被均匀磁化, \mathbf{M} 是常矢量,介质内不存在磁化体电流;当外加磁场不均匀时, \mathbf{M} 是分布函数,介质体积内将出现宏观磁化电流;

(2) 由式(4.4.4),利用斯托克斯定理可得介质内穿过截面 S 的磁化电流强度为

$$I_m = \int_S \nabla \times \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.4.6)$$

式(4.4.6)表明,在磁介质中,磁化强度沿任一闭合回路的环量等于闭合回路所包围的总磁化电流;

(3) 由式(4.4.5)可知,被磁化($\mathbf{M} \neq 0$)的介质表面总会存在磁化面电流;

(4) 由于磁化电流是由分子电流有序排列形成的,而分子电流总是在微观范围内自成闭合回路,因此穿过整块介质的任意截面上的磁化电流总量必定为零,即有

$$I_m + I_{mS} = 0 \quad (4.4.7)$$

4.4.2 介质中的安培环路定律

介质被磁化后产生的磁化电流 \mathbf{J}_m 与自由电流 \mathbf{J} 一样也会产生磁场,因此,只需在真空中的安培定律中加入磁化电流 \mathbf{J}_m 即可得到介质中的安培环路定律:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum (I + I_m) = \mu_0 \int_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m) \cdot d\mathbf{S}$$

将式(4.4.6)代入上式,得

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (\sum I + \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l})$$

将上式改写为

$$\oint_C \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum I \quad (4.4.8)$$

令

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (4.4.9)$$

则(4.4.8)可写为

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I \quad (4.4.10)$$

其中, \mathbf{H} 称为**磁场强度**,是为使磁场的计算简单而引进的辅助矢量,单位为 A/m (安/

米)。式(4.4.10)称为介质中的安培定律的积分形式,它表明,在介质中磁场强度沿任意回路的环量等于该回路所包围的自由电流的代数和。利用斯托克斯定理,与之对应的微分形式是

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (4.4.11)$$

它表明磁场强度 \mathbf{H} 的涡旋源是自由电流。

由于在磁介质中引入了辅助量 \mathbf{H} , 为便于分析, 还必须找出 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 之间的更简单的关系。

实验表明, 磁化强度 \mathbf{M} 与磁场强度 \mathbf{H} 满足

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (4.4.12)$$

其中, χ_m 称为介质的磁化率, 对于线性和各向同性磁介质, χ_m 为一个无量纲的常数。非线性磁介质的 χ_m 与磁场强度有关, 非均匀磁介质的 χ_m 为空间位置的函数, 各向异性介质的 \mathbf{M} 和 \mathbf{H} 的方向不同, χ_m 为张量。顺磁介质的 χ_m 为正实数, 抗磁介质的 χ_m 为负实数, 真空中的 χ_m 为 0。将式(4.4.12)代入式(4.4.9), 得

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad (4.4.13)$$

式(4.4.13)称为 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 之间的本构关系。其中

$$\mu = (1 + \chi_m)\mu_0 = \mu_r\mu_0 \quad (4.4.14)$$

其中, μ 称为介质的磁导率, 单位为 H/m (亨/米); $\mu_r = 1 + \chi_m$ 称为介质的相对磁导率, 对于线性和各向同性磁介质是一个无量纲的常数。由于顺磁质和抗磁质的 χ_m 都很小, 因而磁化效应都很弱, 工程上通常认为它们的相对磁导率 $\mu_r \approx 1$ 。而铁磁性物质, \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 的关系并非线性, 通常用 $\mathbf{B} \sim \mathbf{H}$ 曲线(磁滞回线)来表示, 而且它的 μ_r 非常大, 可达几百、几千, 甚至 10^6 量级。

磁化电流的出现并不影响磁通的连续性, 因而仍有 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。另外, 考虑到磁化电流的影响, 介质中的矢量磁位变为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} d\tau' \quad (4.4.15)$$

它所满足的微分方程变为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (4.4.16)$$

综上所述, 可以得到磁介质中恒定磁场的基本方程为

积分形式	微分形式	本构关系
$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$
$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	

磁介质中恒定磁场的基本方程表明, 磁场是有旋无散场, 磁场强度的涡旋源是自由电流, 磁场强度线是围绕自由电流的闭合曲线。

例 4.6 有一磁导率为 μ , 半径为 a 的无限长导磁圆柱, 其轴线处有无限长的线电流 I , 圆柱外是空气 μ_0 , 如图 4-12 所示。试求圆柱内外的 \mathbf{B} , \mathbf{H} 与 \mathbf{M} 的分布。

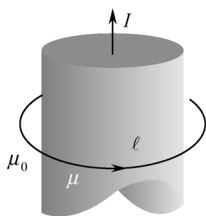


图 4-12 轴线载流的无限长导磁圆柱

解: 因为磁场为轴对称分布, 故利用磁介质中的安培环路定律:

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\rho H_\varphi = I$$

可求出磁场强度为

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\varphi \quad 0 < \rho < \infty$$

利用 $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, 可求出磁感应强度为

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\varphi & 0 < \rho \leq a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\varphi & a < \rho < \infty \end{cases}$$

磁化强度

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{H} = \begin{cases} \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \cdot \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\varphi & \rho < a \\ 0 & a < \rho < \infty \end{cases}$$

本节思考与练习

- 4.9 分析例题 4.6, 求出束缚电流的分布 \mathbf{J}_m 和 \mathbf{J}_{ms} , 并求出介质内和介质表面的磁化电流强度。它们满足 $I_m + I_{ms} = 0$ 吗?
- 4.10 已知相对磁导率为 μ_r 的均匀介质中, 自由电流密度为 \mathbf{J} , 求束缚电流密度 \mathbf{J}_m 。
- 4.11 已知相对磁导率为 $\mu_r(\mathbf{r})$ 的非均匀介质中, 磁场强度分布为 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, 求束缚电流密度 \mathbf{J}_m 。
- 4.12 两半无限大介质磁化强度分别为 $\mathbf{M}_1(z > 0)$ 和 $\mathbf{M}_2(z < 0)$, 分界面为 z 平面, 求介质分界面上的束缚电流密度。

➔ 4.5 恒定磁场的边界条件

介质被磁化后, 介质表面及两种介质分界面总会存在磁化面电流, 磁化面电流又成为磁感应强度的涡旋源, 使 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 在穿过界面时会发生突变, 突变的规律即恒定磁场

的边界条件应满足基本方程的积分形式，推导方法与静电场类似。

4.5.1 法向边界条件和切向边界条件

如图 4-13 所示，在介质的分界面上作一柱状闭合面，闭合面的上、下底面分别位于分界面两侧，回路的高度 $h \rightarrow 0$ 。对此闭合面应用磁通连续性方程得

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} \Delta S - \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} \Delta S = 0$$

式中， \mathbf{n} 为介质分界面法线方向的单位矢量，由介质 2 指向介质 1。于是有

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \text{ 或 } B_{1n} = B_{2n} \quad (4.5.1)$$

该式表明，磁感应强度 \mathbf{B} 的法向分量连续。

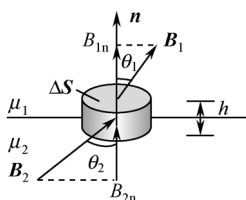


图 4-13 恒定磁场的法向边界条件

如图 4-14 所示，在介质分界面上作一小矩形回路 C ，使回路的两条长边分别位于分界面两侧，回路的高度 $h \rightarrow 0$ ，且回路所围面积的单位方向 \mathbf{s} 与分界面相切。设 Δl 为小矩形回路在介质 1 中的矢量线段，则有

$$\Delta \mathbf{l} = \mathbf{s} \times \mathbf{n} \Delta l$$

将介质中的安培环路定律应用于该回路，即有

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{H}_1 \cdot \Delta \mathbf{l} - \mathbf{H}_2 \cdot \Delta \mathbf{l} = I$$

若分界面上有自由电流，则必定是面电流，即 $I = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{s} \Delta l$ ，代入上式，得

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \Delta \mathbf{l} = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{n}) \Delta l = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{s} \Delta l$$

利用混合积的轮换恒等式，上式可写为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{s}$$

由于 \mathbf{s} 是介质分界面内的任意方向，因此有

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \text{ 或 } H_{1t} - H_{2t} = J_s \quad (4.5.2)$$

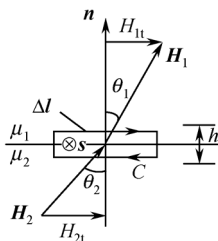


图 4-14 恒定磁场的切向边界条件

该式表明, 磁场强度的切向分量的差值等于分界面上与磁场垂直的面电流密度。一般介质分界面上没有传导电流, 这时, 式 (4.5.2) 可写为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad \text{或} \quad H_{1t} = H_{2t} \quad (4.5.3)$$

表明此种情况下磁场强度的切向分量连续。

综上, 恒定磁场的边界条件总结如下:

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \end{cases} \quad (J_s = 0) \begin{cases} B_{1n} = B_{2n} \\ H_{1t} = H_{2t} \end{cases} \quad (4.5.4)$$

4.5.2 折射关系

设 \mathbf{B}_1 与 \mathbf{n} 的夹角为 θ_1 , \mathbf{B}_2 与 \mathbf{n} 的夹角为 θ_2 , 如图 4-15 所示。

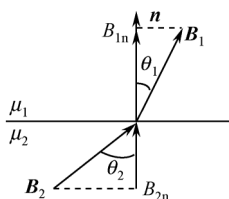


图 4-15 不同介质分界面上的折射关系

若图 4-15 中的分界面上不存在传导电流, 则利用式 (4.5.1) 和式 (4.5.3) 可推出:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{B_{1t} / B_{1n}}{B_{2t} / B_{2n}} = \frac{B_{1t}}{B_{2t}} = \frac{\mu_1 H_{1t}}{\mu_2 H_{2t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (4.5.5)$$

式 (4.5.5) 表明, 磁力线在分界面上会改变方向。利用此式, 可分析下面两种分界面上磁场的分布特征。

(1) 理想导磁体表面。

设介质 1 为空气, 介质 2 为理想导磁体, 即 $\mu_2 = \infty$, 则由 $\mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_2$, 可得到

$$\mathbf{H}_2 = 0$$

因为如果 $\mathbf{H}_2 \neq 0$, 则 $B_2 \rightarrow \infty$, 即要求有无穷大的恒定电流, 这显然是不可能的。因此, 理想导磁体内不可能存在恒定磁场。于是由边界条件可知 $H_{1t} = H_{2t} = 0$, 表明理想导磁体表面磁场仅无法向分量, 即**磁场总是与理想导磁体表面垂直的**。

(2) 铁磁物质表面。

设介质 1 为空气, 介质 2 为铁磁物质, 即 $\mu_2 = \mu \gg \mu_0 = \mu_1$, 则由式 (4.5.5) 可知

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \rightarrow 0 \quad \text{即} \quad \theta_1 \rightarrow 0, \quad \theta_2 \rightarrow 90^\circ \quad (4.5.6)$$

该式表明, 空气中的磁感应线几乎垂直于铁磁物质表面, 而铁磁物质则像是在“收拢”磁力线, 使其顺着铁磁物质走。因而如图 4-16 所示的铁磁球壳, 就可以起到较好的磁屏蔽作用。与静电屏蔽的区别是, 磁屏蔽是不彻底的。加厚屏蔽层可以提高屏蔽程度, 更好的办法是双重屏蔽。

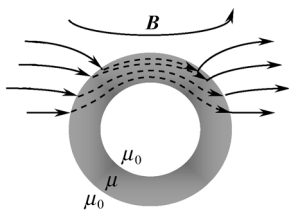


图 4-16 磁屏蔽壳的磁力线分布

4.5.3 用矢量位表示的边界条件

根据矢量磁位的散度和旋度定义, 即 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, 利用 $B_{1n} = B_{2n}$ 的边界条件, 可推出:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \quad (4.5.7)$$

利用 $H_{1t} = H_{2t}$ 的边界条件, 可推出:

$$\frac{1}{\mu_1} (\nabla \times \mathbf{A}_1)_t = \frac{1}{\mu_2} (\nabla \times \mathbf{A}_2)_t \quad (4.5.8)$$

例 4.7 环形铁心螺线管半径 a 远小于环半径 R , 环上均匀密绕 N 匝线圈, 电流为 I , 铁心磁导率为 μ , 如图 4-17 (a) 所示。① 计算螺线管中的 \mathbf{B} 和 Φ ; ② 如果在环上开一个宽度为 t 的小切口, 如图 4-13 (b) 所示, 电流及匝数都不变, 求铁心和空气隙中的 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 。

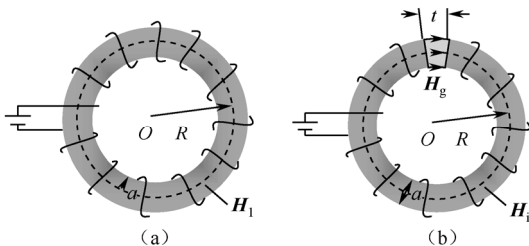


图 4-17 环形铁心螺线管

解: ① 参照图 4-17 (a), 因为 $a \ll R$, 可认为铁心截面上磁场均匀分布, 沿轴线取环积分, 利用安培环路定律有

$$\oint_C \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l} = H_1 \cdot 2\pi R = NI$$

$$H_1 = \frac{NI}{2\pi R}$$

$$B_1 = \mu H_1 = \frac{\mu NI}{2\pi R}$$

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} = B_1 \cdot \pi a^2 = \frac{\mu NI a^2}{2R}$$

② 当环上开一小切口时, 参照图 4-17 (b), 由于 t 很小, 可认为 \mathbf{B} 仍然均匀分布在 $S = \pi a^2$ 的截面上, 边缘效应可以忽略。根据法向边界条件, 有 $B_g = B_i = B_2$, 利用安培环

路定律有

$$\oint_C \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l} = H_1 \cdot (2\pi R - t) + H_g t = NI$$

$$\frac{B_1}{\mu} \cdot (2\pi R - t) + \frac{B_g}{\mu_0} t = NI$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \mu NI}{2\pi R \mu_0 + (\mu - \mu_0)t} = \frac{\mu NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)t} < \frac{\mu NI}{2\pi R} = B_1$$

由于 $\mu_r \gg 1$, 则 B_2 比 B_1 小了很多。

铁心和空气隙中的磁场强度 H_1 和 H_g 分别为

$$H_1 = \frac{B_2}{\mu} = \frac{NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)t}$$

$$H_g = \frac{B_2}{\mu_0} = \frac{\mu_r NI}{2\pi R + (\mu_r - 1)t} \gg H_1$$

说明磁场强度主要集中在切口的空隙中。

本节思考与练习

- 4.13 用铁磁材料制成的箱体可以用做磁屏蔽壳, 解释其原理。
- 4.14 一根无限长的直线电流通流 I , 位于两种半无限大磁介质的分界面内, 如图 4-18 所示, 求两介质中的磁感应强度和磁场强度。
- 4.15 一根无限长的直线电流通流 I , 垂直于两种半无限大磁介质的分界面放置, 如图 4-19 所示, 求两介质中的磁感应强度和磁场强度。

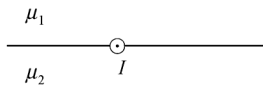


图 4-18

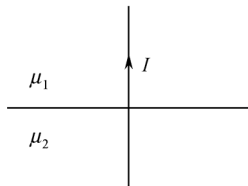


图 4-19

- 4.16 证明矢量磁位 \mathbf{A} 满足的边界条件: 式 (4.5.7) 和式 (4.5.8)。

➔ 4.6 标量磁位

4.6.1 标量磁位及其方程

恒定磁场是有旋场, 但在电流分布之外的区域, 磁场强度是无旋的, 此时可引入标量位, 即可令

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m \quad (4.6.1)$$

式中, Φ_m 称为恒定磁场的标量磁位, 单位为 A (安培)。式 (4.6.1) 中的负号是为了与静电场的标量电位相对应而人为地加入的。

在均匀介质内, μ 与空间坐标无关, 于是有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

将式 (4.6.1) 代入上式, 可得出标量磁位满足的方程:

$$\nabla^2 \Phi_m = 0 \quad (4.6.2)$$

式 (4.6.2) 与标量电位满足的拉普拉斯方程完全相同。把边界条件式 (4.5.4) ($\mathbf{J}_S = 0$) 代入式 (4.6.1), 可得标量磁位的边界条件为

$$\mu_1 \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial n} \Big|_S = \mu_2 \frac{\partial \Phi_{m2}}{\partial n} \Big|_S \quad (4.6.3)$$

$$\Phi_{m1} \Big|_S = \Phi_{m2} \Big|_S \quad (4.6.4)$$

可见式 (4.6.3) 和式 (4.6.4) 与静电场电位的边界条件在形式上也完全相同, 因此关于标量电位的求解方法也都适用于标量磁位。

4.6.2 标量磁位的多值性

静电场是无旋场, 是保守的, 因此电位是与积分路径无关的单值函数; 而恒定磁场是有旋场, 是非保守的, 所以标量磁位与积分路径有关, 当积分路径环绕电流时标量磁位是多值的函数。

由 $\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m$ 可推出

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \int_r^{\text{参考点}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.6.5)$$

以直线电流的标量磁位为例, 计算 \mathbf{H} 沿图 4-20 中的环路从场点 A 到参考点 P 的线积分。当积分路径取 A 到 P 最短的弧线时, 由式 (4.6.5) 计算可得

$$\Phi_{m1}(A) = \int_0^\varphi \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{a}_\varphi \rho d\varphi = \frac{I}{2\pi} \varphi$$

当积分路径取从 A 环绕电流 n 次后到达 P 点时, 标量磁位则为

$$\Phi_{m2}(A) = \int_0^{2n\pi+\varphi} \frac{I}{2\pi\rho} \mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{a}_\varphi \rho d\varphi = \frac{I}{2\pi} \varphi + nI$$

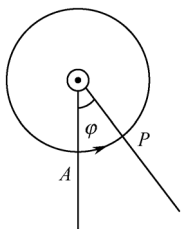


图 4-20 直线电流的标量磁位

可见,对同一点 A 而言, Φ_m 的取值有无穷多个,它们彼此之间相差一个常数 nI ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)。但由于 $\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m$, Φ_m 的多值性并不会影响磁场的解, \mathbf{B} 、 \mathbf{H} 的解仍然是唯一的。

4.6.3 介质磁化的磁荷模型及其标量磁位

对于介质的磁化机理的解释,除了安培的分子电流模型,还有一种假说,就是仿照介质的极化原理提出的磁荷模型,即认为磁偶极距也像电偶极矩那样由一对等量异号的磁荷产生。这样介质体积中的磁化体电荷密度为

$$\rho_m = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (4.6.6)$$

介质表面的磁化面电荷密度为

$$\rho_{mS} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \quad (4.6.7)$$

于是可以直接写出介质中的磁荷所产生的标量磁位为

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{R} d\tau' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\rho_{mS}(\mathbf{r}')}{R} dS' \quad (4.6.8)$$

且标量磁位满足泊松方程:

$$\nabla^2 \Phi_m = -\rho_m \quad (4.6.9)$$

在 $\rho_m = 0$ 的空间,标量磁位满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \Phi_m = 0 \quad (4.6.10)$$

虽然到目前为止尚未确认磁荷的存在,但这种假设可以作为一种简化理论分析的工具。在时变场的求解中,也经常利用磁荷等对偶的物理量把场方程写成对偶的形式,然后根据对偶性原理套用电(磁)场的解直接写出磁(电)场的解。

本节思考与练习

4.17 证明小电流环的标量磁位为

$$\Phi_m = \frac{I}{4\pi} \Omega$$

其中 Ω 为场点对电流环的面积所张的立体角。

4.18 试总结静电场和恒定磁场的基本理论及其相关公式,并列出对偶的物理量组。

➔ 4.7 电感

4.7.1 自感系数和互感系数

设线性媒质中存在的两个载流回路 C_1 和 C_2 , 分别通流 I_1 和 I_2 , 如图 4-21 所示。根据毕奥—沙伐定律,回路电流 I_1 产生的磁场 \mathbf{B}_1 与 I_1 成正比,因此, \mathbf{B}_1 与回路 C_1 相交链

的磁通 $\Phi_{11} = \int_S \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1$ 及 \mathbf{B}_1 与回路 C_2 相交链的磁通 $\Phi_{12} = \int_S \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2$ 均与 I_1 成正比。同样, 回路电流 I_2 产生的磁场 \mathbf{B}_2 与回路 C_1 相交链的磁通 $\Phi_{21} = \int_S \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1$ 及 \mathbf{B}_2 与回路 C_2 相交链的磁通 $\Phi_{22} = \int_S \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2$ 均与 I_2 成正比。当回路 C_1 和 C_2 均绕有多匝时, 则电流与各匝回路交链的磁通量之和, 称为磁链, 可表示为

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \Psi_{11} + \Psi_{21} \\ \psi_2 &= \Psi_{22} + \Psi_{12}\end{aligned}\quad (4.7.1)$$

其中, Ψ_{11} 为电流 I_1 与回路 1 相交链的磁链, Ψ_{21} 为 I_2 与回路 1 相交链的磁链, Ψ_{22} 为电流 I_2 与回路 2 相交链的磁链, Ψ_{12} 为 I_1 与回路 2 相交链的磁链。显然, $\Psi_{11}, \Psi_{12} \propto I_1$; $\Psi_{21}, \Psi_{22} \propto I_2$ 。

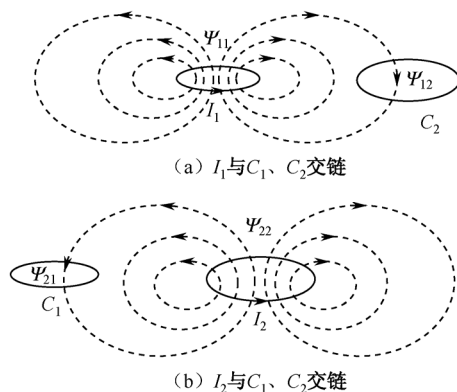


图 4-21 磁链

定义

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{I_1} \quad (4.7.2)$$

为回路 1 的自感系数, 及

$$L_2 = \frac{\Psi_{22}}{I_2} \quad (4.7.3)$$

为回路 2 的自感系数。

自感系数简称为自感, 单位为 H (亨利), 大小与导线回路的尺寸、形状及周围的媒质参数有关, 与导线中有无电流无关。

定义

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} \quad (4.7.4)$$

为回路 1 对回路 2 的互感系数, 及

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} \quad (4.7.5)$$

为回路 2 对回路 1 的互感系数。

互感系数简称为互感，单位也为 H（亨利）。互感的大小与导线回路的尺寸、形状、两个线圈的相互位置及周围的媒质参数有关，与回路中有无电流无关。

自感和互感统称为电感。根据上述自感和互感的定义，回路 C_1 和回路 C_2 中的总磁链可重新写为

$$\begin{aligned}\psi_1 &= L_1 I_1 + M_{21} I_2 \\ \psi_2 &= L_2 I_2 + M_{12} I_1\end{aligned}\quad (4.7.6)$$

推而广之，当线性媒质中存在 N 个回路时，第 j 个回路的磁链可写为

$$\Psi_j = \sum_{k=1}^N M_{kj} i_k \quad (4.7.7)$$

其中， $M_{kj} (k \neq j)$ 为第 k 个回路和第 j 个回路之间的互感系数， $M_{jj} = L_j$ 为回路 j 的自感系数。

4.7.2 自感和互感的计算

两个极细单匝回路间的互感可由互感的定义直接计算。如图 4-22 所示，设回路 C_1 载有电流 I_1 ，则其穿过 C_2 的磁链为

$$\Psi_{12} = \Phi_{12} = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R}$$

其中， $d\mathbf{l}_1$ 和 $d\mathbf{l}_2$ 分别是 C_1 和 C_2 上任取的线元矢量， R 是 $d\mathbf{l}_1$ 到 $d\mathbf{l}_2$ 间的距离。

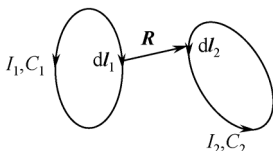


图 4-22 互感的计算

代入式 (4.7.4)，可得

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \quad (4.7.8)$$

式 (4.7.8) 称为诺依曼 (Neumann) 公式。同理可得

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{R} \quad (4.7.8)$$

由式 (4.7.8) 和式 (4.7.9) 可以看出

$$M_{21} = M_{12} = M \quad (4.7.10)$$

可见，互感具有互易性。

若 C_1 密绕 N_1 匝， C_2 密绕 N_2 匝，则 $\Psi = \sum \Phi = N\Phi$ ，于是

$$\Psi_{12} = N_2 \Phi_{12} = N_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{N_1 I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} = N_1 N_2 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R}$$

$$M = M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = M_{21} = N_1 N_2 M_0 \quad (4.7.11)$$

其中, M_0 为 $N_1 = N_2 = 1$ 时 C_1 和 C_2 之间的互感。

自感的计算式同样可以由定义得到。当考虑到导线的直径时, 由于电流在导线内部和外部均产生磁场, 与之交链的磁链也可细分为内磁链和外磁链, 因此, 自感又分为内自感和外自感。

如图 4-23 所示, 电流 I 与导线外部最内侧的回路 C_2 中的磁感应交链的磁链称为外磁链; 与导线内部磁感应交链的磁链称为内磁链。计算外自感时可把电流 I 看成是集中于导线的轴线 C_1 上的细电流, 于是外自感的计算式可写成诺依曼公式 (4.7.8) 的形式:

$$L_{0\text{外}} = \frac{\Phi_{\text{外}}}{I} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{R} \quad (4.7.12)$$

如果匝数 $N \neq 1$, 则 $L_{\text{外}} = N^2 L_{0\text{外}}$ 。

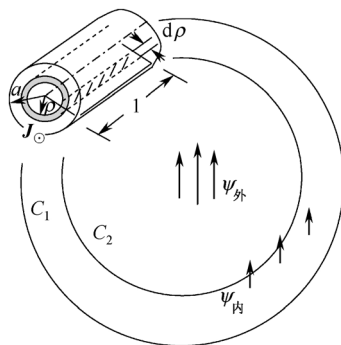


图 4-23 外自感和内自感

计算内自感时应注意, 内磁链是导线中部分电流与磁感应交链而成的。例如, 半径为 a 的无限长直导线内的磁感应强度为

$$B(\rho) = \frac{\mu_0 I'}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0}{2\pi\rho} \left(\frac{\rho^2}{a^2} I \right) = N(\rho) \frac{\mu_0}{2\pi\rho} I$$

其中, 磁感应线“套住”的电流是 $N(\rho)I = \frac{\rho^2}{a^2} I$, $N(\rho) = \frac{\rho^2}{a^2}$ 相当于回路的匝数 (小于 1)。在半径为 ρ 处, 磁感应穿过长为 l 且宽为 $d\rho$ 的面元的磁通元为

$$d\Phi = B(\rho)dS = N(\rho) \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho$$

磁链元为

$$d\Psi_{\text{内}} = N(\rho)d\Phi = N^2(\rho) \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^4} \rho^3 l d\rho$$

于是可得长为 l 的导线的内自感为

$$L_{\text{内}} = \frac{\Psi_{\text{内}}}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi a^4} \int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{\mu_0 l}{8\pi} \quad (4.7.13)$$

例 4.8 两个共轴的、互相平行的一匝圆线圈相距为 d ，半径分别为 a 和 b ，且 $d \gg a$ ，如图 4-24 所示，求它们之间的互感。

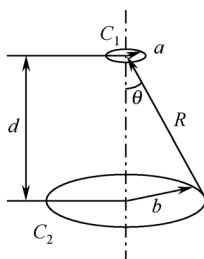


图 4-24 例 4.8 示意图

解：因为互感具有互易性，可以设 C_1 通流 I ，也可以设 C_2 通流 I 。此处设 C_1 通流 I 进行计算。

$$\because d \gg a \quad \therefore R \approx d$$

由 4.3 节中式 (4.3.10)，通过电流为 I 、半径为 a 的小圆环在远离圆环处的矢量磁位为

$$A(r, \theta) = a_\varphi \frac{\mu_0 \pi a^2 I \sin \theta}{4\pi R^2}$$

I 产生的磁场与回路 C_2 交链的磁链 Ψ_{12} 为

$$\Psi_{12} = \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_2 = A \cdot 2\pi b = \frac{\mu_0 \pi a^2 I}{4\pi R^2} (\sin \theta) 2\pi b$$

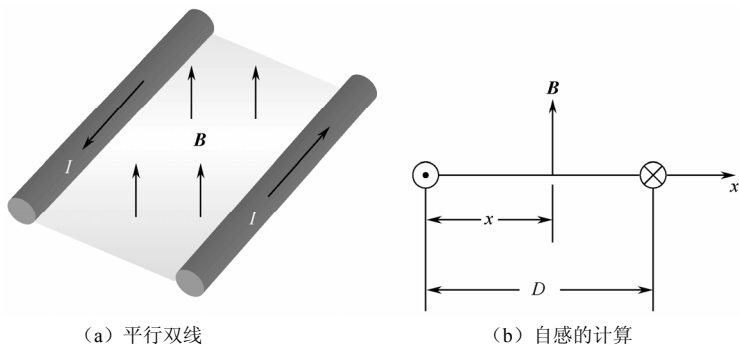
由图 4-24 中几何关系可得出

$$\sin \theta = \frac{b}{R} \quad R = \sqrt{b^2 + d^2}$$

代入互感定义式可求出

$$M = \frac{\Psi_{12}}{I} = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2 + d^2)^{3/2}}$$

例 4.9 求平行双线传输线单位长度的外自感。已知导线半径为 a ，导线间距离 $D \gg a$ ，如图 4-25 所示，并设大地的影响可以忽略。



(a) 平行双线

(b) 自感的计算

图 4-25 例 4.9 示意图

解: 设导线电流为 I , 根据无限长直导线的磁场计算结果, 可求出平行双线传输线两轴线所在平面间磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right)$$

磁场的方向与导线回路平面垂直, 单位长度的外磁链为

$$\Psi = \Phi_0 = \int_S B dS = \int_a^{D-a} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) dx = \frac{\mu_0 I}{\pi} \ln \frac{D-a}{a}$$

代入定义式可求出单位长度的外自感为

$$L_0 = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D-a}{a} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a}$$

诺依曼公式证明了两个回路互感的互易性, 提供了计算互感的基本公式, 但实际应用却比较少, 因为公式中的积分非常复杂且不易求出。当电流分布简单, 求解磁场比较容易时, 可利用式 (4.7.2) 至式 (4.7.5) 求解自感和互感。

本节思考与练习

- 4.19 用金属丝绕制的标准电阻要求是无自感的, 怎样绕制自感系数为零的线圈?
- 4.20 有两个线圈距离相隔不太远, 如何放置可使其互感系数为零?
- 4.21 例题 4.10 中, 试通过设大圆环 C_2 且通电流 I 来求两圆环之间的互感, 并与例题 4.10 的结果比较, 它们相同吗?
- 4.22 求平行双线传输线单位长度的内自感, 并指出在什么条件下可以只考虑外自感而忽略内自感?

→ 4.8 磁场能量和磁场力

4.8.1 磁场能量

安培力定律表明, 磁场对电流有力的作用, 这说明磁场中储存着能量。由于磁场由电流产生, 电流依靠外源建立, 因而磁场能量是在建立电流的过程中由外源做功转换而来的。

假设媒质为线性媒质; 磁场建立无限缓慢, 即不考虑涡流及辐射; 系统能量仅与系统的最终状态有关, 与能量的建立过程无关。这样, 根据能量守恒定律, 外源所做的功将转变为磁场中的能量。

设系统中有 n 个电流回路, 每个回路电流初值均为零, 终值为 I_j , 建立电流的过程中任意时刻回路电流为 $i_j(t) = \alpha I_j$, 其中, $\alpha \in [0, 1]$, 则当电流增加 $di_j(t) = I_j d\alpha$ 时, 各回路的磁通量发生变化, 产生感应电动势

$$\varepsilon_j = -\frac{d\Psi_j}{dt} \quad (4.8.1)$$

为克服该电动势，回路需外加电压

$$u_j = -\varepsilon_j = \frac{d\Psi_j}{dt} \quad (4.8.2)$$

于是，外加的电源在 dt 时间内对回路所做的功为

$$dW_j = u_j dq_j = u_j i_j dt = \frac{d\Psi_j}{dt} i_j dt = i_j d\Psi_j \quad (4.8.3)$$

在前面假设电流系统没有其他能量损失的情况下，该部分功将全部转化为磁场能量储存在系统中。因此，整个系统的磁场能量在 dt 时间内的增量即为

$$dW_m = \sum_{j=1}^N i_j d\Psi_j \quad (4.8.4)$$

将式 (4.7.7) 代入上式，则有

$$dW_m = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N i_j M_{kj} di_k = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_{kj} I_j I_k d\alpha \quad (4.8.5)$$

设回路电流从 0 到 I_j 线性增加，则电流建立完成后，磁场储存的总能量为

$$W_m = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N M_{kj} I_j I_k \int_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (M_{kj} I_k) I_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Psi_j I_j \quad (4.8.6)$$

对 $N=2$ ，即系统具有 2 个回路的情形，有 $M_{11}=L_1$ ， $M_{22}=L_2$ ， $M_{12}=M_{21}=M$ ，系统具有的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad (4.8.7)$$

对 $N=1$ ，即单个回路的情形，系统的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad (4.8.8)$$

由此式也可得到单个回路自感系数的另一个计算式为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} \quad (4.8.9)$$

若已知系统的磁场分布为 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} ，也可计算磁场能量。把回路 j 的磁链

$$\Psi_j = \sum_{k=1}^N M_{kj} I_k = \oint_{c_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_j \quad (4.8.10)$$

代入式 (4.8.6)，得

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N I_j \oint_{c_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \oint_{c_j} \mathbf{A} \cdot I_j d\mathbf{l}_j \quad (4.8.11)$$

若考虑分布电流情形，利用 $I d\mathbf{l} = \mathbf{J} d\tau$ ，把以上结果推广到分布电流的情况，则可得分布电流的磁场能量

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (4.8.12)$$

式(4.8.12)的积分区域为电流所在的空间。

将 $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}$ 代入式(4.8.12), 并利用 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 及矢量恒等式 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$, 可得

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d\tau = \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tau} [\mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{H})] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau - \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

式中, τ 指电流所在的空间, 如果将积分区域扩大到整个空间, 积分值并不会发生变化。

因此, 可令 $\tau \rightarrow \infty$, 即 $R \rightarrow \infty$ 。由于 $A \propto \frac{1}{R}$, $H \propto \frac{1}{R^2}$, $S \propto R^2$, 因而有 $\mathbf{A} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{S} \propto \frac{1}{R} \rightarrow 0$,

所以

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau = \int_{\tau} w_m d\tau \quad (4.8.13)$$

其中,

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (4.8.14)$$

为磁场能量体密度, 积分区域 τ 为整个空间。此式表明**磁场能量储存于磁场不为零的全部空间**。

对简单媒质, 有

$$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu} \quad (4.8.15)$$

例 4.10 以空气绝缘的同轴线, 其内、外导体半径分别为 a 和 b , 通流 I 。假设外导体极薄, 因而其中的储能可忽略不计, 计算单位长度的同轴线储存的磁能, 并由磁能计算单位长度的电感。

解: 由介质中的安培环路定律, 可求出导体圆柱内外的磁场强度为

$$\begin{aligned} \rho < a, \quad H_{1\varphi} &= \frac{1}{2\pi\rho} \frac{\rho^2}{a^2} I = \frac{\rho I}{2\pi a^2} \\ a \leq \rho \leq b, \quad H_{2\varphi} &= \frac{I}{2\pi\rho} \\ \rho > b, \quad H_{3\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

由式(4.8.13)和式(4.8.15), 可得单位长度的同轴线储存的磁能为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \int_{\tau_1} \mu H_1^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau_2} \mu H_2^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{\mu_0 \rho^2 I^2}{4\pi^2 a^4} 2\pi\rho d\rho + \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 \rho^2} 2\pi\rho d\rho \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} \end{aligned}$$

由式(4.8.9)计算单位长度的电感为

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = L_{\text{内}} + L_{\text{外}}$$

4.8.2 磁场力

两个载流回路间的作用力原则上可用安培力定律计算,但实际上很不方便,因而经常利用磁场能量对空间的变化率来计算力,也就是采用虚位移法进行力的计算。

设在 N 个刚性载流导线回路系统的磁场中,其中一个载流导线回路 C_i 或磁性媒质沿 \mathbf{l} 方向受到磁场力 F_l 的作用而发生位移 $d\mathbf{l}$,其余回路位置固定不变。在位移过程中,设外源做功为 dW ,系统中磁场能量的增量为 dW_m ,则根据能量守恒定律,有

$$dW = dW_m + F_l d\mathbf{l} \quad (4.8.16)$$

其中,由式(4.8.3)和式(4.8.6)可知

$$dW = \sum_{k=1}^N u_k dq_k = \sum_{k=1}^N \frac{d\Psi_k}{dt} I_k dt = \sum_{k=1}^N I_k d\Psi_k \quad (4.8.17)$$

$$dW_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N d(I_k \Psi_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (I_k d\Psi_k + \Psi_k dI_k) \quad (4.8.18)$$

下面分两种情况讨论。

(1) 假定各回路包围的磁通保持不变,即 $d\Psi_k = 0$ 。

此种情况下,各个回路中不产生感应电动势,因此外源不做功,由式(4.8.16)得出

$$F_l d\mathbf{l} = -dW_m$$

$$F_l = - \left. \frac{dW_m}{d\mathbf{l}} \right|_{\Psi=\text{常数}} \quad (4.8.19)$$

式(4.8.19)表明,磁场消耗自身能量用来做机械功。

(2) 假定各回路电流保持不变,即 $dI_k = 0$ 。

此种情况下,式(4.8.18)变为

$$dW_m = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} I_k d\Psi_k$$

可以看出

$$dW = \sum_{k=1}^N I_k d\Psi_k = 2dW_m$$

于是由式(4.8.16)可得

$$F_l d\mathbf{l} = dW - dW_m = dW_m$$

$$F_l = \left. \frac{dW_m}{d\mathbf{l}} \right|_{I=\text{常数}} \quad (4.8.20)$$

以上各式表明,外接电源所做的功,一半用来做了机械功,另一半用来增加了磁场能量。

与静电场中的静电力类似, 磁场力也可用能量的梯度来表示, 即式 (4.8.18) 和式 (4.8.19) 可写为更一般的表达式为

$$\mathbf{F} = \nabla W_m \Big|_{I=\text{常数}} \quad (4.8.21)$$

$$\mathbf{F} = -\nabla W_m \Big|_{\psi=\text{常数}} \quad (4.8.22)$$

例 4.11 两个共轴的、互相平行的一匝圆线圈相距为 d , 半径分别为 a 和 b , 且 $d \gg a$, 两线圈中分别载有电流 I_1 和 I_2 , 如图 4-26 所示。求它们之间的磁场力。

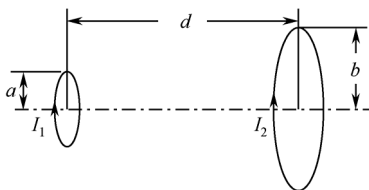


图 4-26 例 4.11 图

解 由例 4.8 得到的结果, 两线圈之间的互感为

$$M = \frac{\mu_0 \pi a^2 b^2}{2(b^2 + d^2)^{3/2}}$$

由式 (4.8.7), 两线圈的磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

由式 (4.8.19), 线圈 1 对线圈 2 的磁场力为

$$F_{12} = \frac{dW_m}{dd} = I_1 I_2 \frac{dM}{dd} = -\frac{3\pi\mu_0 a^2 b^2 d I_1 I_2}{2(b^2 + d^2)^{5/2}}$$

当电流 I_1 和 I_2 同向时, 为吸引力, 反向时为排斥力。

本节思考与练习

- 4.23 导线回路的磁场能量与回路磁链有何关系?
- 4.24 用电流密度计算磁场能量与用 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 场量计算磁场能量有何不同? 给出具体计算公式。
- 4.25 导线回路的磁场能量满足叠加原理吗? 为什么?

➔ 4.9 恒定磁场的 MATLAB 运算和仿真

恒定磁场主要利用 `quiver` 命令绘制矢量图, 也可进行数值积分计算磁场。

例 4.12 画出半径为 a 且通流为 I 的小圆环远区的矢量位和磁场。

解 (1) 电流环的矢量磁位为

$$A(r, \theta) = a_\varphi \frac{\mu_0 IS \sin \theta}{4\pi r^2} = a_\varphi \frac{\mu_0 I a^2 \sin \theta}{4r^2}$$

为简单, 取 $\frac{\mu_0 IS}{4\pi} = 1$ 。

代码如下。

```
%计算矢量磁位
theta=0:pi/5:2*pi;phi=-pi/4:pi/4; r=0.8:0.6:2;
[t,p,r]=meshgrid(theta,phi,r);           %在球坐标下建立网格
Ax=-cos(p)./(r.^2).*sin(t);              %矢量位 A 的 x 分量
Ay= cos(p)./(r.^2).*cos(t);              %矢量位 A 的 y 分量
Az=0.*sin(p).*r;                          %矢量位 A 的 z 分量
[x,y,z]=sph2cart(t,p,r);                 %将网格转化为直角坐标
quiver3(x,y,z,Ax,Ay,Az,2);               %画出三维矢量图
Xlim([-1.4 1.4]);                         %将显示范围限制在网格内
Ylim([-1.4 1.4]);
Zlim([-1.4 1.4]);
```

所画出的三维矢量图如图 4-27 所示。

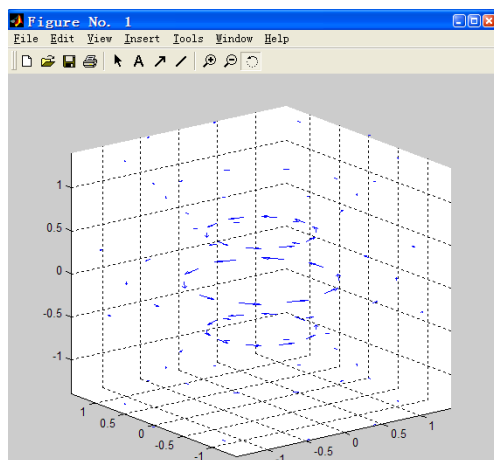


图 4-27 小圆环电流矢量位 A 的分布图

注意: MATLAB 中对球坐标变量的定义与使用的符号与本教材有所不同, 对比如图 4-28 所示。

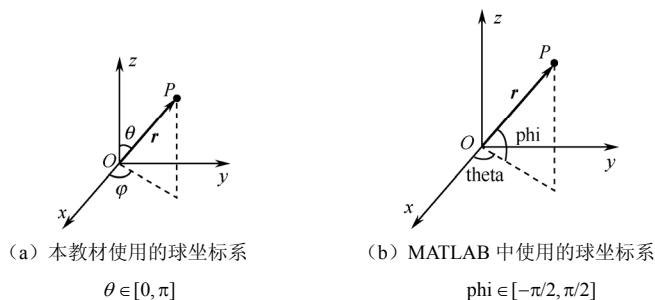


图 4-28 坐标系对比图

(2) 磁感应可由矢量位计算得出

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \text{curl} \mathbf{A}$$

代码如下。

```
%磁感应场分布 (三维)
[x,y,z]=meshgrid(-3:.5:3); %在直角坐标下建立网格
A=sqrt((x.^2+y.^2)./(x.^2+y.^2+z.^2))./(x.^2+y.^2+z.^2); %矢量位函数值
Ax=-A.*y./sqrt(x.^2+y.^2); %矢量位的 x 分量
Ay=A.*x./sqrt(x.^2+y.^2); %矢量位的 y 分量
Az=0.*z; %矢量位的 z 分量
[dx,dy,dz,cav]=curl(x,y,z,Ax,Ay,Az); %求矢量位的旋度即磁感应
B=sqrt(dx.^2+dy.^2+dz.^2); %磁感应的模值
Bx=dx./B; %对磁感应的 x 分量归一化
By=dy./B; %对磁感应的 y 分量归一化
Bz=dz./B; %对磁感应的 z 分量归一化
quiver3 (x,y,z,Bx,By,Bz,7); %画出磁感应的归一化三维矢量图
```

所画出的归一化三维矢量图如图 4-29 所示。

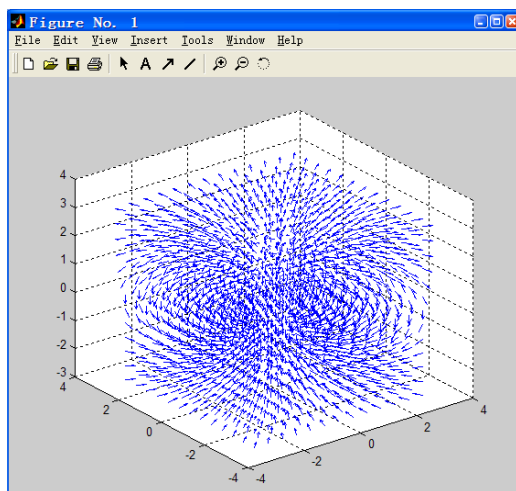


图 4-29 小圆环电流磁感应的归一化三维矢量图

(3) 由磁感应

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 SI}{4\pi r^3} (\mathbf{a}_r 2 \cos \theta + \mathbf{a}_\theta \sin \theta)$$

在 $x=0$ 平面, $\varphi = \pi/2$, 于是

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{a}_z \cos \theta = \mathbf{a}_y \sin \theta + \mathbf{a}_z \cos \theta$$

$$\mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_x \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_y \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{a}_z \sin \theta = \mathbf{a}_y \cos \theta - \mathbf{a}_z \sin \theta$$

仍取 $\frac{\mu_0 IS}{4\pi} = 1$, 则有

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r^3} [\mathbf{a}_y 3 \sin \theta \cos \theta + \mathbf{a}_z (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)]$$

代码如下。

```
%磁感应场分布（二维）
[y,z]=meshgrid(-4:.5:4);           %在直角坐标系中建立网格
r=sqrt(y.^2+z.^2);                 %计算x=0平面上的变量r
c=z./r;s=y./r;                     %计算cosθ和sinθ
By=3*s.*(r.^3);                    %计算磁感应的y分量
Bz=(2*c.*(r.^3));                  %计算磁感应的z分量
B=sqrt(By.^2+Bz.^2);               %计算磁感应的模值
By=By./B;                           %对磁感应的y分量归一化
Bz=Bz./B;                           %对磁感应的z分量归一化
quiver(y,z,By,Bz,0.6);             %在y-z平面画出磁感应的归一化矢量图
xlim([-4 4]);
ylim([-3 3]);
```

所画出的归一化二维矢量图如图 4-30 所示。

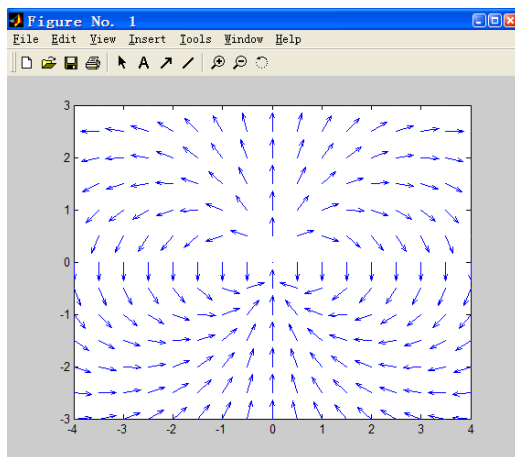


图 4-30 小圆环电流磁感应的归一化二维矢量图

例 4.13 画出平行双线传输线的磁场分布。

解 单根电流直线的磁感应为

$$\mathbf{B} = \mathbf{a}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} = (-\mathbf{a}_x \sin \varphi + \mathbf{a}_y \cos \varphi) \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

其中,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin \varphi = y/\rho, \quad \cos \varphi = x/\rho$$

为简单, 取 $\frac{\mu_0 I}{2\pi} = 1$, 电流 $-I$ 和 $+I$ 分别位于 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$, 于是, 任意一点磁感应为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = -a_{\varphi 1} \frac{1}{\rho_1} + a_{\varphi 2} \frac{1}{\rho_2} \\ &= a_x \left(\frac{\sin \varphi_1}{\rho_1} - \frac{\sin \varphi_2}{\rho_2} \right) + a_y \left(-\frac{\cos \varphi_1}{\rho_1} + \frac{\cos \varphi_2}{\rho_2} \right) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(x+1)^2 + y^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}, \\ \sin \varphi_1 &= y / \rho_1, \quad \sin \varphi_2 = y / \rho_2, \\ \cos \varphi_1 &= (x+1) / \rho_1, \quad \cos \varphi_2 = (x-1) / \rho_2 \end{aligned}$$

代码如下。

%平行双线的磁场	%在直角坐标系中建立网格
[x,y]=meshgrid (-3:25:3);	%计算 ρ_1
p1=sqrt ((x+1).^2+y.^2);	%计算 ρ_2
p2=sqrt ((x-1).^2+y.^2);	%计算 $\cos \varphi_1$ 和 $\cos \varphi_2$
c1=(x+1)./p1;c2=(x-1)./p2;	%计算 $\sin \varphi_1$ 和 $\sin \varphi_2$
s1=y./p1;s2=y./p2;	%计算磁感应的 x 分量
Bx=s1./p1-s2./p2;	%计算磁感应的 y 分量
By=-c1./p1+c2./p2;	%计算磁感应的模值
B=sqrt (Bx.^2+By.^2);	%对磁感应的 x 分量归一化
Bx=Bx./B;	%对磁感应的 y 分量归一化
By=By./B;	%画出磁感应的归一化矢量图
quiver (x,y,Bx,By,0.5);	
xlim ([-3 3]);	
ylim ([-2 2]);	

运行结果如图 4-31 所示。若不进行归一化处理, 则运行结果如图 4-32 所示。

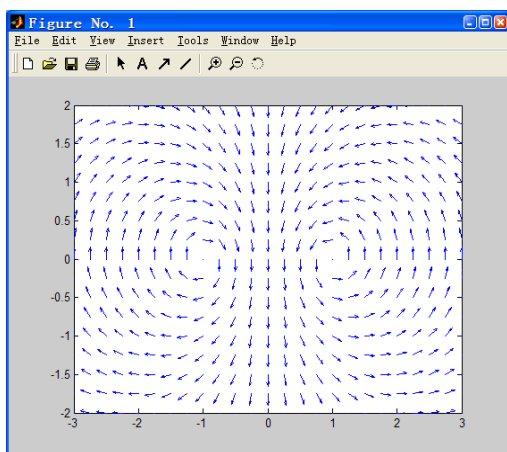


图 4-31 反向电流磁感应归一化矢量图

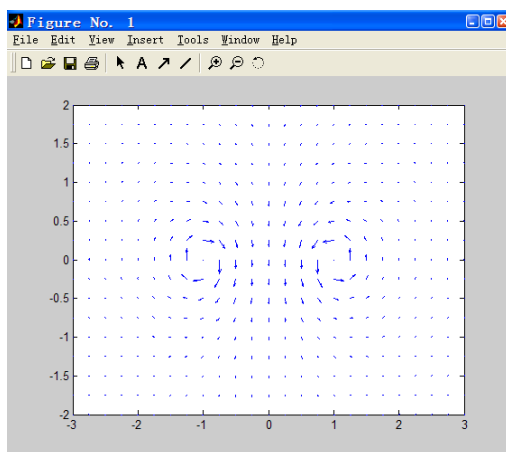


图 4-32 反向电流磁感应矢量图

若两个电流同向, 均为 $+I$, 则运行结果如图 4-33 和 4-34 所示。

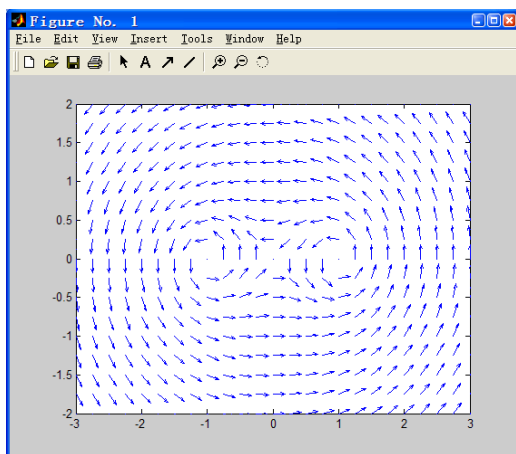


图 4-33 同向电流磁感应归一化矢量图

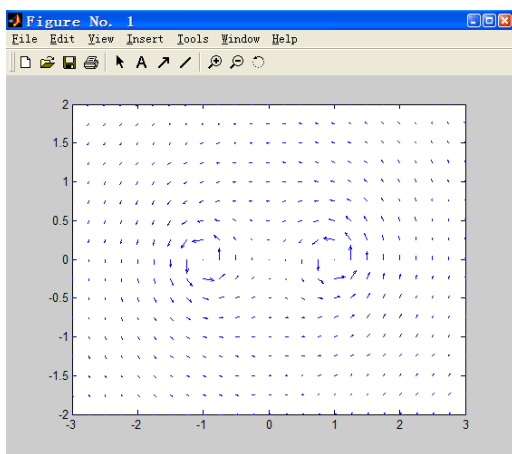


图 4-34 同向电流磁感应归一化矢量图

本节思考与练习

4.26 画出半径为 a 且通流为 I 的长直导线内外的磁感应矢量图。

4.27 画出两对平行双线传输线上、下平行放置或左右平行放置时的磁感应矢量图。

本章小结

1. 安培力定律

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{a}_R)}{R^2} \quad \text{N}$$

2. 真空中电流产生的磁感应强度

线电流:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\mathbf{l}' \times \mathbf{a}_R}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\mathbf{l}' \times \mathbf{R}}{R^3}$$

体电流:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{a}_R}{R^2} d\tau'$$

面电流:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_S \times \mathbf{a}_R}{R^2} dS'$$

3. 洛伦兹力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

4. 真空中恒定磁场的基本方程

积分形式:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I$$

微分形式:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

5. 矢量磁位和标量磁位

矢量磁位 \mathbf{A} 由 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 确定, 满足泊松方程或拉普拉斯方程, 即

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0$$

其解为

体电流:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{R} d\tau'$$

面电流:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_s}{R} dS'$$

线电流:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{I d\mathbf{l}'}{R}$$

在有恒定电流分布的曲线、表面和体积之外, 磁场强度是无旋的。可引入标量磁位 Φ_m , 有

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m$$

标量磁位满足拉普拉斯方程:

$$\nabla^2 \Phi_m = 0$$

6. 介质中的安培定律

介质在外加磁场中会发生磁化, 磁化的程度用磁化强度 \mathbf{M} 表示, 磁场强度 \mathbf{H} 与磁化强度 \mathbf{M} 的关系为

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

对于各向同性介质, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 。介质中安培环路定律的积分和微分形式分别为

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

其中 I 是闭合回路包围的自由电流。

7. 恒定磁场的边界条件

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad \text{或} \quad B_{1n} = B_{2n}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad \text{或} \quad H_{1t} - H_{2t} = J_s$$

8. 电感

在线性介质中, 一个电流回路的磁链与引起该磁链的电流 I 成正比, 其比值即为电感。电感分为自感和互感。电感的大小与回路的形状、大小、相对位置及周围介质有关, 与回路电流无关。

9. 磁场能量和磁场力

磁场能量储存在整个磁场所在的空间, 磁场能量的计算公式有以下两个:

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d\tau$$

的积分空间为电流所在的空间;

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\tau} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau$$

的积分区域为磁场所在的整个空间。

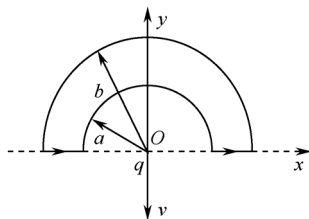
磁场力可由虚位移法计算:

$$F_l = \left. \frac{dW_m}{dl} \right|_{I=\text{常数}}$$

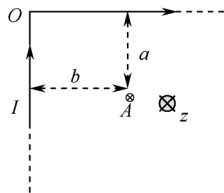
$$F_l = - \left. \frac{dW_m}{dl} \right|_{\psi=\text{常数}}$$

习 题 四

- 4.1 四根无限长直导线 1、2、3、4 垂直于 xOy 平面, 分别位于点 $(0, 0)$ 、 $(a, 0)$ 、 (a, a) 、 $(0, a)$ 。导线 1、3 通以电流 Ia_z , 导线 2、4 通以电流 $-Ia_z$, 求位于 (a, a) 点的导线上每单位长度受到的磁力。
- 4.2 如题 4.2 图所示的回路通有线电流 I , 此刻正有一点电荷经过 O 点, 速度为 $-a_y v$, 求它所受的磁力。
- 4.3 题 4.3 图所示的呈直角拐弯的导线中通过电流为 I , 导线两端向远处无限延长, 试求图中 A 点处的磁感应 \mathbf{B} 。



题 4.2 图



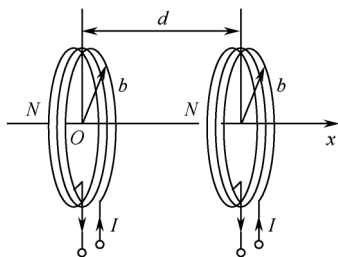
题 4.3 图

- 4.4 一个半径为 a 、相对电容率为 ϵ_r 的非磁性圆柱体处于均匀磁场 \mathbf{B} 中, \mathbf{B} 平行于该圆柱的轴线。若圆柱以角速度 ω 绕轴线旋转, 求:

- ① 由于旋转而在圆柱中产生的极化强度 \mathbf{P} ;
- ② 长为 L 的一段圆柱面上出现的面束缚电荷电量。

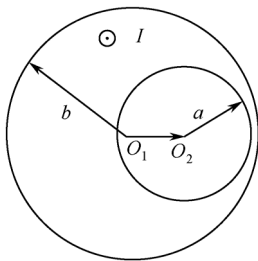
4.5 如题 4.5 图所示, 两个相同的线圈各有 N 匝, 半径为 b , 同轴, 相互隔开距离为 d , 电流 I 以相同的方向流过这两个线圈。

- ① 求两个线圈中点处的 $\mathbf{B}(=\mathbf{a}_x B_x)$;
- ② 证明在两线圈中点处 $\mathrm{d}B_x/\mathrm{d}x=0$;
- ③ 求出 b 与 d 之间的关系, 使中点处 $\mathrm{d}^2 B_x/\mathrm{d}x^2=0$, 并证明此时在中点处 $\mathrm{d}^3 B_x/\mathrm{d}x^3$ 也为零。



题 4.5 图

- 4.6 一个长螺线管, 半径为 a , 长度 $L \gg a$, 匝数为 N , 通过电流为 I , 求管的轴线上任意一点的 \mathbf{B} 。
- 4.7 半径为 R 的小球面上有沿 φ 方向流动的均匀面电流, 其密度为 J_s , 求球心处的 \mathbf{B} 。
- 4.8 如题 4.8 图所示, 电流密度均匀的长圆柱导体中有一平行的圆柱形空腔, 计算各部分的磁感应强度, 证明空腔内磁场是均匀的。



题 4.8 图

4.9 下面的矢量场中, 哪些是可能的磁场分布? 如果是, 求电流分布。

- ① $\mathbf{B} = \mathbf{a}_r kr$
- ② $\mathbf{B} = -\mathbf{a}_x ky + \mathbf{a}_y kx$
- ③ $\mathbf{B} = \mathbf{a}_\varphi A\rho$

4.10 磁场 \mathbf{B} 的分布用圆柱坐标可表示为如下形式:

$$\mathbf{B} = \begin{cases} 0 & (\rho \leq a) \\ a_{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} & (a < \rho \leq b) \\ a_{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & (\rho > b) \end{cases}$$

求空间各点的电流密度 \mathbf{J} 。如何产生上述磁场？

- 4.11** 电量 Q 在以原点为球心、半径为 a 的球体积中均匀分布。现在使该球绕 z 轴以角速度 ω 匀速旋转，假设电荷的分布不受旋转的影响，求 z 轴上任一点的 \mathbf{A} 。
- 4.12** 铁质无限长导线的半径为 a ， $\mu_r = 1000$ ，通有恒定电流 I ，求：
- ① 空间各点的 \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 。若改为铜导线， a 、 I 不变，问 \mathbf{H} 、 \mathbf{B} 有何变化？
 - ② 空间各点的磁化强度 \mathbf{M} ，束缚体电流密度 \mathbf{J}_m ；
 - ③ 导线表面上的束缚面电流密度 \mathbf{J}_{ms} 。
- 4.13** 一根极细的直铁杆和极薄的圆铁盘放在均匀磁场 \mathbf{B}_0 中，使它们的轴与 \mathbf{B}_0 平行。若已知 $\mathbf{B}_0 = 1\text{T}$ ，铁件的 $\mu_r = 5000$ ，求上述两个铁件的 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 。
- 4.14** 在 $\mu = 1500\mu_0$ 的铁磁体中靠近与空气的交界处，若 $B_1 = 1.5 \text{ Wb/m}^2$ ，其方向与法线夹角 $\theta_1 = 35^\circ$ ，试求：
- ① 铁表面上空气中 \mathbf{H}_2 的大小和方向（提示：当 θ 很小时，可利用 $\theta \approx \tan \theta$ ）；
 - ② 面束缚电流密度。
- 4.15** 无限大理想导磁体平面上方 h 处有一通流为 I 的长直导线，导线与导磁体平面平行，试分析导磁体表面磁场的分布特点，画出该系统的镜像系统，并求出导磁体平面上方的磁场强度。
- 4.16** 一个半径为 a 的磁介质球的磁化强度为
- $$\mathbf{M} = a_z (Az^2 + B)$$
- 求磁化电流 \mathbf{J}_m 、 \mathbf{J}_{ms} 和磁荷 ρ_m 、 ρ_{ms} 。
- 4.17** 为了对亨利 (H) 这一单位是多么巨大的一个概念，试计算一个直径为 2cm、长度为 1m、600 匝的长直空心螺线管的自感。（提示：螺线管内 $H = nI$ ， n 为每米匝数。）
- 4.18** 有一个环形螺线管，环的平均半径为 15 cm，管的圆形截面半径为 2 cm，通过电流为 0.7A，铁心 $\mu_r = 1400$ ，环上共绕 1000 匝线圈。
- ① 计算螺线管的电感；
 - ② 在铁心上开一个 0.1cm 的气隙，再计算电感（假设开口后铁心 μ 不变）。
- 4.19** 两个一匝矩形线圈相互平行并置于同一平面上，它们的长度各为 l_1 和 l_2 ，宽度各为 w_1 和 w_2 ，两线圈最近的边距离是 S 。假设 $l_1 \gg l_2$ ，略去端部效应，试证明两线圈的互感是

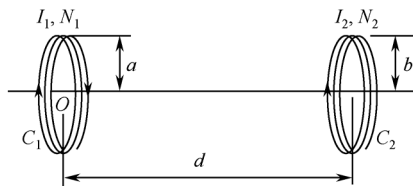
$$M = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \ln \frac{S + w_2}{S \left(1 + \frac{w_2}{S + w_1} \right)}$$

4.20 假设 E 和 B 在数值上相同, 且均采用国际单位制, 试计算真空中恒定磁场和静电场能量密度的比值 w_m/w_e 。

4.21 求证题 4.21 图示的两个相距很远的共轴载流线圈 C_1 和 C_2 间的作用力为

$$F_{12} = m \frac{3\mu_0 p_{m1} p_{m2}}{2\pi d^4}$$

C_1 和 C_2 相距为 d , 半径分别为 a 和 b ($d \gg a, d \gg b$), 匝数分别为 N_1 和 N_2 , 电流分别为 I_1 和 I_2 , $p_{m1} = N_1 \pi a^2 I_1$ 和 $p_{m2} = N_2 \pi a^2 I_2$ 分别为 C_1 和 C_2 的磁矩。当 I_1 和 I_2 同 (反) 方向时上式取负 (正) 号, 表示吸引 (排斥) 力。



题 4.21 图

4.22 半径为 r 的圆形回路电感为 L , 若通以电流 I , 试证使圆环半径扩大的力为 $\frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial r}$ 。

第 5 章

时变电磁场

静电荷产生静电场，恒定电流产生恒定磁场。显然，当电荷分布和电流分布随时间变化时，电场和磁场也是随时间变化的。当这种变化非常缓慢时，可以预料，这时的时变电场和磁场与静态场的特性非常相似，一般称为缓变场或**准静态场**。而实验指出，对随时间快速变化的迅变场来说，电场和磁场不再能够独立存在，它们相互激发，相互转换，成为统一的电磁场。一般由时变磁场产生的电场称为**感应电场**，由时变电场产生的磁场称为**感应磁场**。

本章我们将在介绍法拉第电磁感应定律的基础上，全面总结时变电磁场的基本方程——麦克斯韦方程组及介质分界面上的边界条件；由无源区的麦克斯韦方程导出电场和磁场的波动方程，从而得出时变电磁场具有波动性的结论；介绍正弦电磁场的复数表示法及时变场的能量运动规律——坡印廷定理；为简化有源区麦克斯韦方程组的求解，引入辅助函数——动态位，通过求解动态位满足的达朗贝尔方程，得出由于动态位是滞后位因而电磁波是辐射场的结论。

➔ 5.1 法拉第电磁感应定律

1831 年英国科学家法拉第经过近十年的实验研究，发现了利用磁场产生电场的方法，史称法拉第电磁感应定律。

如图 5-1 所示，当穿过闭合导体回路 C 的磁通 Φ 发生变化时，回路中会产生电流 i ，说明回路中感应出了电动势 e 。在感应电动势（感应电流）的参考方向与回路 C 的环绕方向一致的情况下，法拉第电磁感应定律的数学表达式为

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (5.1.1)$$

式中，负号表示感应电动势的方向总是使感应电流的磁场阻碍原有磁通的变化。

导体回路中电流的出现表明导体中存在能够推动电荷运动的电场，这种由回路磁通变化产生的非保守电场，称为感应电场。感应电场沿回路的线积分即感应电动势，于是式 (5.1.1) 可写为

$$e = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (5.1.2)$$

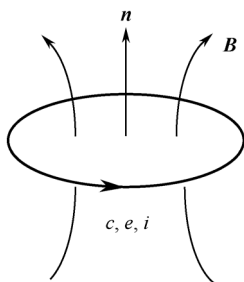


图 5-1 电磁感应定律中的参考方向示意

式 (5.1.2) 并不直接反映感应电流, 事实上, 导体回路的存在给了我们观察电磁感应现象的一个手段, 若没有导体回路, 感应电场同样会存在。因此, 回路 C 可推广至任意回路, 只要磁通时变, 即可产生感应电场。

将磁通的数学计算式 $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ 代入式 (5.1.2) 中, 可得

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.1.3)$$

分析上式, 可得出感应电场的几种实现方法。按照函数乘积的求导法则, 有

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \int_S \mathbf{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (d\mathbf{S}) \quad (5.1.4)$$

可见, 获得电动势 (感应电场) 的方法可以有三个: 一是回路不动, 磁场随时间变化, 即式 (5.1.4) 右边第一项不为零, 第二项为零; 二是磁场恒定, 回路相对于磁场变化, 即式 (5.1.4) 右边第一项为零, 第二项不为零; 三是磁场和回路均随时间变化, 即式 (5.1.4) 右边两项均不为零。

对第一种情况, 有

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.1.5)$$

利用斯托克斯定理, 可将其写为微分形式

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.1.6)$$

式 (5.1.5)、(5.1.6) 是我们最常用的电磁感应定律的形式, 它们表明**时变的磁场可以产生电场**, 感应电场的场线是环绕磁场的闭合曲线, 且与磁感应线垂直。因此, 感应电场也称为涡旋电场。

对第二种情况, 有

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \mathbf{B} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (d\mathbf{S}) \quad (5.1.7)$$

注意式中的 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 及回路 C 均为 t 时刻的值。若设回路以速度 \mathbf{v} 相对于磁场运动, t 时刻 C 围成的面积为 $\mathbf{S}(t)$, 则 $t + \Delta t$ 时刻位移后的 C 即 $C(t + \Delta t)$ 围成的面积为

$$\mathbf{S}(t + \Delta t) = \mathbf{S}(t) + \oint_C (\mathbf{v} \Delta t) \times d\mathbf{l}$$

其中, $\oint_C (\mathbf{v}\Delta t) \times d\mathbf{l}$ 为 Δt 时间内回路 C 以速度 \mathbf{v} 在空间运动时所扫过的面积, 如图 5-2 所示。这样, 式 (5.1.7) 中的偏微分项可计算如下:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{dS}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{dS}(t+\Delta t) - \mathbf{dS}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{d}[\mathbf{S}(t+\Delta t) - \mathbf{S}(t)]}{\Delta t} = \mathbf{v} \times d\mathbf{l} \quad (5.1.8)$$

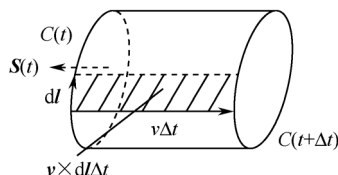


图 5-2 回路 C 在不同时刻所围面积示意

将式 (5.1.8) 代入式 (5.1.7), 并利用矢量恒等式 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}$, 可得

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5.1.9)$$

由于方程两边的回路 C 均为任意时刻 t 的同一任意回路, 因此有

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.1.10)$$

该式表明: **运动的系统** (例如闭合或不闭合的导体回路) **在做切割磁力线的运动时** (即 \mathbf{v} 与 \mathbf{B} 不平行) **能够产生感应电场**。这种由于系统与磁场之间的相对运动引起的感应电场 (电动势) 也称为**动生电场** (电动势)。

对于第三种情况, 则是最一般的情况, 将以上两种情况综合起来, 即可得到

$$e = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (5.1.11)$$

$$\text{或} \quad \oint_C (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{积分形式}) \quad (5.1.12)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{微分形式}) \quad (5.1.13)$$

例 5.1 图 5-3 所示的法拉第圆盘是单机发电机的模型, 半径为 a 的金属盘在恒定磁场 \mathbf{B} 中以角速度 ω 匀速转动, 从轴心和圆盘边缘的电刷引出两条线连接负载构成回路。求负载两端的电压, 并说明极性。

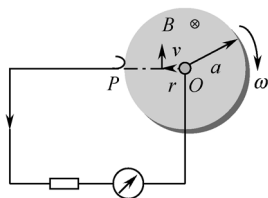


图 5-3 法拉第圆盘

解 金属圆盘可看做由无数根半径为 a 的金属丝连续分布而成, 当圆盘转动时, 这些金属丝做切割磁力线的运动, 从而产生电动势。注意到不同半径上的点的线速度不同, 由式 (5.1.9) 可得

$$e = \int_0^a \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^a \omega r B dr = \frac{1}{2} \omega B a^2$$

该电动势加在负载两端, 即是负载两端的电压, 且 P 点为电压正极, O 点为电压负极。

本节思考与练习

- 5.1 图 5-4 所示导体棒 PQ 以速度 v 在磁场 B 中沿平行绝缘轨匀速滑动, 试问 P 、 Q 两点哪点电位高? 高多少?

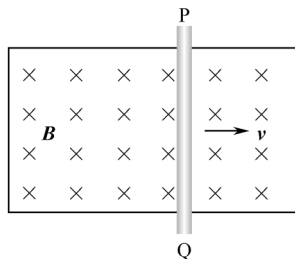


图 5-4 垂直磁场运动的导体棒

- 5.2 图 5-5 所示是一个单匝矩形框, 其长、宽分别为 l 和 w , 置于均匀的时变场 $\mathbf{B} = a_y B_0 \sin \omega t$ 中, 起始时刻线圈平面的法线与 y 轴夹角为 α , 求下述两种情况下, 线圈中的感应电动势:

- (1) 线圈静止; (2) 线圈以角速度 ω 绕 x 轴旋转。

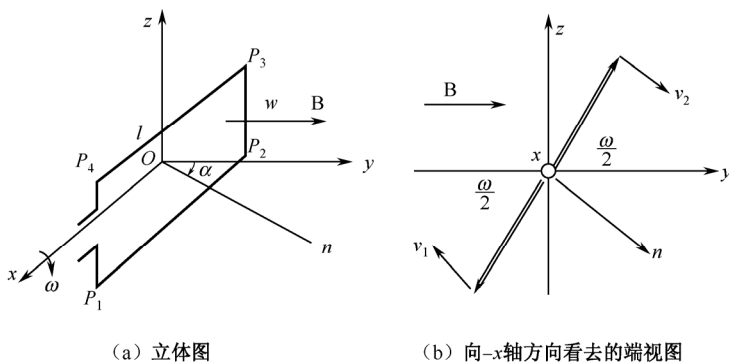


图 5-5 在时变磁场中旋转的矩形线圈

→ 5.2 位移电流

静态场基本方程的散度方程

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

可以直接推广到时变场。因为实验证实**高斯定律是关于场源电荷与它的电场关系的普遍规律**，不仅对静止电荷成立，而且对运动电荷的每一瞬间也成立。而磁场不存在磁荷这类场源的事实也是迄今为止的实验结果。因此，时变场中电场和磁场的散度方程可写为

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(t) = \rho(t) \quad (5.2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t) = 0 \quad (5.2.2)$$

后面为简便，各个物理量不再特意标出表示是时间函数的自变量 (t)。若式 (5.2.1) 两边同时对时间求导，则有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.2.3)$$

将前述的电荷守恒定律

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

代入式 (5.2.3)，可得

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.2.4)$$

根据矢量恒等式 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ ，显然式 (5.2.4) 中的 $\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right)$ 可用某个矢量的旋度来表示，对比恒定磁场的基本方程 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ ，及电流恒定时 $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ，可以断定，这个矢量就是时变磁场 $\mathbf{H}(t)$ 。于是有

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.2.5)$$

其对应的积分形式为

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.2.6)$$

式 (5.2.5) 和式 (5.2.6) 称为**时变场的安培定律**。它比恒定磁场的安培定律多了一项 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ，

显然这一项具有电流密度的量纲 (A/m^2)，英国物理学家麦克斯韦称其为**位移电流密度**，用符号 \mathbf{J}_D 表示，即

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.2.7)$$

$\mathbf{J}_D + \mathbf{J}$ 则称为**全电流密度**或总电流密度，由此式 (5.2.5) 和式 (5.2.6) 也称为**全电流定律**。

位移电流概念的引入是麦克斯韦最伟大的贡献之一：(1) 麦克斯韦之前所有的电磁

学定律都是实验定律，而时变场的安培定律则是理论定律；(2) 位移电流不是真实的电流，不能直接测量，它的本质是时变的电场，这一项出现在安培定律中表明：**时变的电场可以产生时变的磁场，磁感应线是环绕时变电场的闭合曲线，且与电场矢量线垂直**；(3) 法拉第电磁感应定律表明磁可以生电，修正后的安培定律指出电可以生磁，这种电和磁相互感应、相互依存的关系使麦克斯韦能够预言电磁场将在空间以电磁波的形式传播；(4) 1887 年德国物理学家赫兹用实验证实了电磁波的存在，从而证明了麦克斯韦理论的正确性，完成了科学史上理论指导实践的一次大飞跃，人类由此进入无线电电子时代。

例 5.2 如图 5-6 所示含有电容器的交流电路，试利用电荷守恒定律的积分形式证明：电路中的传导电流是由位移电流接续起来的，即 $i = i_D$ 。

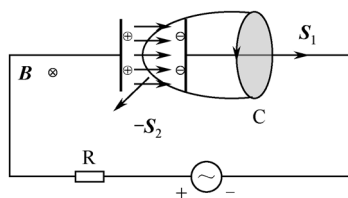


图 5-6 含有电容器的交流电路

证明：如图 5-6 所示，在电容器外部取一个环绕导线的闭合回路 C ，它所围成的面积可取做 S_1 ，还可取做穿过电容器内部的 S_2 ，而 S_1 和 S_2 构成一个闭合曲面。注意，按照开表面的面积方向规定， S_1 和 S_2 与环路 C 呈右手关系，而按照闭合面的面积方向规定，这个闭合面由 S_1 和 $-S_2$ 构成。依据电荷守恒定律，流出该闭合面的传导电流等于该闭合面内电荷量的减少率，即

$$i_c = \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{S_2} \boldsymbol{\theta} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_1} \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}$$

又由高斯定律可知，闭合面内的电荷（存在于电容器的极板上）满足

$$q = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

于是有

$$\begin{aligned} -\frac{dq}{dt} &= -\frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = -\oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{S_2} \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_1} \boldsymbol{\theta} \cdot d\mathbf{S} = i_D \end{aligned}$$

因此可得

$$i_c = \int_{S_1} \mathbf{J}_c \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \mathbf{J}_D \cdot d\mathbf{S} = i_D$$

该例子可以解释交流电路中电容器的电流是由于电容器两端电压随时间变化，使得极板间电场随时间变化，进而极板上的电荷随时间变化，从而产生电荷的流动形成电流的整个过程。此外，对此例应用安培环路定律式 (2.5.6) 时，环路包围的面积若取做 S_1 ，则磁场的环量是传导电流；若取做 S_2 ，则磁场的环量是位移电流，而传导电流和位

移电流相等, 因此, 无论如何选取环路所围面积, 都可得到相同的磁场环量。而若把恒定场的安培定律直接应用于时变场, 则由于面积 S_2 上没有传导电流通过, 导致磁场的环量为零, 从而使两者的结果产生矛盾, 这进一步证明位移电流在安培定律中存在的必要性。

例 5.3 已知中空的电容器两平行电极圆盘状, 半径为 a , 极间距离为 d , 外加电压 $u = U \sin \omega t$, 求此电容器中的电磁场分布。

解 此电容器中的场为准静电场, 其电场的计算与静电场相同, 为

$$E = \frac{u}{d} = \frac{U \sin \omega t}{d}$$

板间位移电流密度为

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \epsilon_0 \omega \frac{U \cos \omega t}{d}$$

磁场可由安培定律求得

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ H_\phi 2\pi\rho &= \epsilon_0 \omega \frac{U \cos \omega t}{d} \pi\rho^2 \\ H_\phi &= \epsilon_0 \omega \frac{U \cos \omega t}{2d} \rho \end{aligned}$$

本例在计算电场时, 利用了 $\frac{\partial B}{\partial t} = 0$, 即忽略了磁场变化所产生的感应电场。这是由于当频率很低时, 场量的变化比较缓慢, 电容器中的电场更接近于静电场, 因此, 可用静电场的方程求取电场, 再用时变场的方程求取磁场, 这样的场也称为准静电场; 类似地, 准静磁场则可用恒定磁场的方程求取磁场, 再用时变场的方程求取电场, 如线圈类的器件中的电磁场的计算即可采用此种方法。

本节思考与练习

5.3 位移电流是电流吗? 它的本质是什么?

5.4 高斯定律对运动电荷也成立。设想一个点电荷 q 绕 O 点以角速度 ω 匀速转动, 如图 5-7 所示, 求 O 点的位移电流密度。

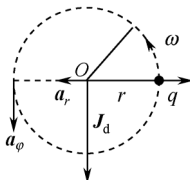


图 5-7

5.5 海水的电导率 $\sigma = 4 \text{ S/m}$ ， $\varepsilon_r = 81$ 。求 $f = 1 \text{ Hz}$ 、 1 kHz 和 1 MHz 时位移电流与传导电流的比值。

→ 5.3 麦克斯韦方程组

1864 年麦克斯韦在总结了库仑、高斯、安培、法拉第等人的研究成果之后，运用场论的观点，将这些实验定律用一组数学方程式描述出来，成为宏观电磁场的基本方程，这就是著名的麦克斯韦方程组。其中安培定律中的位移电流项，使这组方程从形式到内容堪称科学史上最和谐、完美的数学语言。

5.3.1 麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程的积分形式为

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (5.3.1)$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (5.3.2)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (5.3.3)$$

$$\oint_V \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_V \rho d\tau \quad (5.3.4)$$

麦克斯韦方程的微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.3.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5.3.8)$$

从形式上，这组方程体现了电与磁的完美对称，尤其是采用磁荷模型时。由于无论何种情况，磁感应线总是闭合的，因此磁场无散。另外，若认为磁场存在类似于电场的散度源磁荷，只是正、负磁荷密度相等且不可分，即 $\rho_m = \rho_{m+} + \rho_{m-} = 0$ ；磁荷的运动形成磁流，即 $\nabla \cdot \mathbf{J}_m = - \frac{\partial \rho_m}{\partial t}$ ，式中 \mathbf{J}_m 表示磁流密度，当然实际数值为零；类似于位移电流

$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ ，定义位移磁流 $\mathbf{J}_M = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ，则麦克斯韦方程组在数学方程式上达到完美对称，

在电与磁的场量上达到完全对偶。以微分形式为例，式 (5.3.5) ~ 式 (5.3.8) 可写为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.3.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \mathbf{J}_M - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.3.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m = 0 \quad (5.3.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5.3.12)$$

可见 $\mathbf{B} \sim \mathbf{D}$ 、 $\mathbf{H} \sim \mathbf{E}$ 、 $\mathbf{J} \sim \mathbf{J}_m$ 、 $\rho \sim \rho_m$ 以及 $\mathbf{J}_D \sim \mathbf{J}_M$ 是五组对偶的物理量，这四个方程在形式上就可以看做两个方程，即一个旋度方程和一个散度方程，这为数学求解带来方便。

从内容上看，电场是有散有旋场，磁场是无散有旋场。高斯定律表明，电场起始于电荷；当电荷随时间变化时，必然形成电流，安培定律指出电流将产生涡旋状的磁场；法拉第电磁感应定律表明，磁场随时间变化时会产生涡旋状的电场；安培定律中的位移电流项又导致时变的电场成为磁场的涡旋源。由此可见，变电生磁，变磁生电，电场和磁场成为密不可分的统一体。

特别地，当电荷、电流不随时间变化时，即 $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ，则麦克斯韦方程组退化为静态场的基本方程，这时电场和磁场是可以分开研究的。

5.3.2 本构关系

由于 \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 是辅助矢量，在不同的媒质中和 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 有不同的内在关系，即媒质的电磁特性决定了 \mathbf{D} 和 \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 的本构关系。

在真空中

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (5.3.13)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (5.3.14)$$

在线性、各向同性媒质中，

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (5.3.15)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (5.3.16)$$

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (5.3.17)$$

若媒质均匀，且场量时变速率不太高时， ε 、 μ 和 σ 为常数，若媒质不均匀，则 ε 、 μ 和 σ 为位置的函数。除此简单媒质外，还有各向异性媒质、非均匀媒质及其他复杂媒质，这时 ε 、 μ 和 σ 有可能是张量，在此不作讨论。

5.3.3 无源区的麦克斯韦方程组

无源区一般指 $\mathbf{J} = 0$ 、 $\rho = 0$ 和 $\sigma = 0$ 的区域。这时，简单媒质中的麦克斯韦方程组变为两个旋度方程：

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.3.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (5.3.19)$$

因为两个散度方程可由这两个旋度方程两边取散度得到。可见，脱离开激励源后，电场和磁场互为涡旋源，若已知一个场量，则可求出另一个场量。

5.3.4 无源区的波动方程

无源区中, 若对式 (5.3.19) 两边取旋度, 有

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \times \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H})\end{aligned}$$

将式 (5.3.18) 及 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 代入, 可得

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.3.20)$$

同样方法得到

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.3.21)$$

式 (5.3.20) 和式 (5.3.21) 称为 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 的波动方程。它表明时变电场和磁场具有波动性, 能够形成电磁波。这正是位移电流所导致的结果, 也是麦克斯韦的伟大之处。

式中的 ∇^2 是矢量拉普拉斯微分, 只有在直角坐标中, 式 (5.3.20) 和式 (5.3.21) 所表示的矢量波动方程才能表示成三个标量波动方程, 例如, \mathbf{E} 的方程可表示为

$$\nabla^2 E_x - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \quad (5.3.22)$$

$$\nabla^2 E_y - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \quad (5.3.23)$$

$$\nabla^2 E_z - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (5.3.24)$$

式中的 ∇^2 是标量拉普拉斯微分, 即

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.3.25)$$

本节思考与练习

5.6 麦克斯韦方程组物理意义是什么?

5.7 无源区的麦克斯韦方程有何意义?

➔ 5.4 时变电磁场的边界条件

麦克斯韦方程组在数学求解上属于边值问题, 有了边界条件, 方程组才有定解。与静态场中边界条件的推导过程类似, 时变电磁场的边界条件也是积分形式的麦克斯韦方程在电磁边界上的极限形式, 结果也与静态场在形式上相同。

5.4.1 两种媒质分界面上的边界条件

矢量形式:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S$$

标量形式:

$$H_{1t} - H_{2t} = J_{ST} \quad (5.4.1)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (5.4.2)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (5.4.3)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_S \quad (5.4.4)$$

导电媒质分界面还有

$$\mathbf{n} \times \left(\frac{\mathbf{J}_1}{\sigma_1} - \frac{\mathbf{J}_2}{\sigma_2} \right) = 0 \quad \frac{J_{1t}}{\sigma_1} = \frac{J_{2t}}{\sigma_2} \quad (E_{1t} = E_{2t}) \quad (5.4.5)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2) = 0 \quad J_{1n} = J_{2n} \quad (\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}) \quad (5.4.6)$$

式中, 角标 t 表示平行于分界面的切向, 角标 n 表示垂直于分界面的法向, \mathbf{n} 是由媒质 2 指向媒质 1 的单位矢量, 式 (5.3.22) 中的角标 T 则是为了强调面电流与磁场切向垂直。

5.4.2 理想导体表面的边界条件

理想导体电导率 $\sigma \rightarrow \infty$, 电阻为零, 内部的电场和时变磁场均为零。因此, 若令式 (5.4.1) ~ 式 (5.4.6) 中媒质 2 是理想导体, 则可得理想导体表面的边界条件为

矢量形式:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_S$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_S$$

标量形式:

$$H_{1t} = J_{ST} \quad (5.4.7)$$

$$E_{1t} = 0 \quad (5.4.8)$$

$$B_{1n} = 0 \quad (5.4.9)$$

$$D_{1n} = \rho_S \quad (5.4.10)$$

这些边界条件表明: 在理想导体表面, 电场只可能有法向分量——电场与导体表面垂直, 磁场只可能有切向分量——磁场与导体表面平行, 且 \mathbf{n} 、 \mathbf{H}_1 、 \mathbf{J}_S 相互垂直并呈右手关系。

例 5.4 同轴线内导体半径为 $a = 1 \text{ mm}$, 外导体内半径为 $b = 4 \text{ mm}$, 内充均匀介质 $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 2.25$, $\sigma = 0$ 。已知内外导体之间的电场强度为 $\mathbf{E} = \mathbf{a}_\rho \frac{100}{\rho} \cos(\omega t - \beta z) \text{ V/m}$, 若 $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$, 求 (1) β ; (2) \mathbf{H} ; (3) 验证导体表面边界条件; (4) 内外导体表面的电荷分布和电流分布。

解 (1) 内外导体之间属于无源区, 可以用无源区麦克斯韦方程求解。由式 (5.3.15) 有

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_\rho}{\partial z} \mathbf{a}_\phi = \mathbf{a}_\phi \frac{100\beta}{\rho} \sin(\omega t - \beta z) = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \int \nabla \times \mathbf{E} dt = \mathbf{a}_\varphi \frac{100\beta}{\omega\mu\rho} \cos(\omega t - \beta z) \quad (5.4.11)$$

再由式 (5.3.14)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \frac{\mathbf{a}_\rho}{\rho} & \mathbf{a}_\varphi & \frac{\mathbf{a}_z}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho H_\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \mathbf{a}_\rho = -\mathbf{a}_\rho \frac{100\beta^2}{\omega\mu\rho} \sin(\omega t - \beta z) = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \int \nabla \times \mathbf{H} dt = \mathbf{a}_\rho \frac{100\beta^2}{\omega^2 \mu \varepsilon \rho} \cos(\omega t - \beta z)$$

将上式与已知的 \mathbf{E} 比较, 令其相等, 可得

$$\frac{\beta^2}{\omega^2 \mu \varepsilon} = 1$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = 10^8 \sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 2.25 / (36\pi \times 10^9)} = 0.5 \quad (\text{rad/m})$$

(2) 把 β 代入式 (5.4.11), 得到同轴线内外导体之间的磁场分布为

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_\varphi \frac{5}{4\pi\rho} \cos(10^8 t - 0.5z)$$

(3) 验证导体表面边界条件, 即在内、外导体表面 $\rho = a$ 和 $\rho = b$ 处, 电场应满足切向为零, 磁场应满足法向为零。

对于圆柱面 $\rho = a$ 和 $\rho = b$,

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_\rho E_\rho \rightarrow \mathbf{E}_n, \text{ 即 } \mathbf{E}_t = 0 \text{ —— 满足电场的边界条件}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{a}_\varphi H_\varphi \rightarrow \mathbf{H}_t, \text{ 即 } \mathbf{H}_n = 0 \text{ —— 满足磁场的边界条件}$$

(4) 表面 $\rho = a$ 处, $\mathbf{n} = \mathbf{a}_\rho$,

$$\rho_s(a) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}(a) = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_\rho \Big|_{\rho=0.001} \approx 1.99 \times 10^{-6} \cos(10^8 t - 0.5z) \quad (\text{C/m}^2)$$

$$\mathbf{J}_s(a) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}(a) = \mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\varphi H_\varphi \Big|_{\rho=0.001} \approx \mathbf{a}_z 398 \cos(10^8 t - 0.5z) \quad (\text{A/m})$$

表面 $\rho = b$ 处, $\mathbf{n} = -\mathbf{a}_\rho$,

$$\rho_s(b) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}(b) = -\varepsilon_0 \varepsilon_r E_\rho \Big|_{\rho=0.004} \approx -0.5 \times 10^{-6} \cos(10^8 t - 0.5z) \quad (\text{C/m}^2)$$

$$\mathbf{J}_s(b) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}(b) = -\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_\varphi H_\varphi \Big|_{\rho=0.004} \approx -\mathbf{a}_z 99.5 \cos(10^8 t - 0.5z) \quad (\text{A/m})$$

本节思考与练习

5.8 理想导体表面的电磁场有何特点？

5.9 已知两无限大理想导体平面限定的区域 $0 \leq x \leq a$ 中存在一个如下的电场

$$\mathbf{E}(t) = a_y E_0 \sin(k_x x) \cos(\omega t - k_z z) \text{ V/m}$$

求 k_x 和 k_z 。

→ 5.5 动态位电磁波的一般概念

在静态场中, 引入标量电位 Φ 和矢量磁位 \mathbf{A} 可以简化电场和磁场的求解, Φ 和 \mathbf{A} 统称为静态位。在时变场中, 电磁场的求解比静态场更加复杂, 借助辅助的位函数同样可有效地简化电磁场的求解过程。本节介绍与静态场类似的一对辅助函数——也是最常用的辅助函数对——动态的标量电位和矢量磁位, 统称为动态位。

5.5.1 动态位方程

由麦克斯韦方程中的 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 可引入矢量磁位 \mathbf{A} , 令

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.5.1)$$

将其代入式 (5.3.6), 得

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$$

移项得

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

括号内的矢量是无旋场, 故可引入标量电位 Φ , 使

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi$$

即

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5.5.2)$$

正如时变场中电场和磁场是不可分割的, 其辅助函数 Φ 和 \mathbf{A} 也是不可分割的, 而当 $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ 时, 式 (5.5.1) 和式 (5.5.2) 即退化为静态场情形。

为了求出 Φ 和 \mathbf{A} , 进而由式 (5.5.1) 和式 (5.5.2) 求出 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} , 先要找出 Φ 和 \mathbf{A} 所满足的方程。把式 (5.5.1) 和式 (5.5.2) 代入麦克斯韦方程式 (5.3.5) 和式 (5.3.8) 中, 得

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

整理后得

$$\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \quad (5.5.3)$$

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5.5.4)$$

为了唯一确定 \mathbf{A} ，需要规范 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 。在恒定磁场中，采用的是库伦规范，即 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ；时变场中，采用洛伦兹规范（也称为洛伦兹条件），则更有利于动态位的求解，即令

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (5.5.5)$$

代入式 (5.5.3) 和式 (5.5.4)，可得

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad (5.5.6)$$

$$\nabla^2 \Phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (5.5.7)$$

式 (5.5.6) 和式 (5.5.7) 称为达朗贝尔方程，它是关于动态位 Φ 和 \mathbf{A} 的非齐次波动方程。

5.5.2 动态位方程的解

达朗贝尔方程式 (5.4.6) 和式 (5.4.7)，在无源区 ($\mathbf{J}=0, \rho=0$)，是形如式 (5.3.16) ~ 式 (5.3.20) 的波动方程；当场量与时间无关时，达朗贝尔方程便退化为静态场的泊松方程。波动方程解决的是场分布随时间变化的规律，泊松方程解决的是源分布与场分布之间的关系。这里，我们将通过类比的方法导出达朗贝尔方程的解，更严密的求解方法请参照其他有关资料。

首先分析式 (5.5.7)。假设在均匀线性各向同性媒质中，场源是位于坐标原点的时变点电荷 $q(t)$ ，则除原点之外，标量电位满足波动方程

$$\nabla^2 \Phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

由于点源分布的场具有球对称性，与 θ 和 φ 无关，则在球坐标中代入拉普拉斯微分，即得

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

经整理，得

$$\frac{\partial^2 \Phi(r)}{\partial r^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi(r)}{\partial t^2} = 0 \quad (5.5.8)$$

式 (5.5.8) 表明函数 $\Phi(r)$ 满足波动方程，其通解为

$$\Phi(r) = f(t - \sqrt{\mu \varepsilon} r) + g(t + \sqrt{\mu \varepsilon} r)$$

显然, $\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 是速度的量纲, 表明场量 $\Phi(r)$ 是一种波, $\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ 是这种波沿 r 或 $-r$ 方向推进的速度。令 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$, 则上式改写为

$$\Phi(r) = f\left(t - \frac{r}{v}\right) + g\left(t + \frac{r}{v}\right) \quad (5.5.9)$$

其中 $f\left(t - \frac{r}{v}\right)$ 表示沿 r 方向推进的波, $g\left(t + \frac{r}{v}\right)$ 表示沿 $-r$ 方向推进的波。在无界空间中, 由坐标原点发出的波显然是向外扩散的, 舍去反向的解, 可得点电荷产生的标量电位为

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{v}\right) \quad (5.5.10)$$

已知静态条件下, 位于坐标原点的点电荷 q 产生的电位为

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \quad (5.5.11)$$

那么, 当 q 随时间变化时, $\Phi(r, t)$ 应同时满足式 (5.4.10) 和式 (5.4.11) 的形式, 即

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon r} q\left(t - \frac{r}{v}\right) \quad (5.5.12)$$

将点电荷情形推广到在体积 τ' 内分布的电荷 $\rho(\mathbf{r}', t)$, 则 $\rho(\mathbf{r}', t)d\tau'$ 可看做位于 \mathbf{r}' 的点电荷, 它在场点 \mathbf{r} 处产生的电位为

$$d\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right) d\tau'$$

整个体积 τ' 内的电荷产生的电位就是对上式的积分:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\tau'} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad (5.5.13)$$

矢量磁位 \mathbf{A} 的达朗贝尔方程式 (5.5.6) 在直角坐标系下可写成三个标量达朗贝尔方程:

$$\nabla^2 A_x - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu J_x$$

$$\nabla^2 A_y - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = -\mu J_y$$

$$\nabla^2 A_z - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu J_z$$

它们与电位的达朗贝尔方程形式相同, 因此具有相同结构的解, 把 \mathbf{A} 的三个分量合成

后, 可得矢量磁位 \mathbf{A} 的解为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad (5.5.14)$$

式中, τ' 为电流 \mathbf{J} 的分布区域。

动态位求出后, 即可代入式 (5.5.1)、式 (5.5.2) 或式 (5.5.8)、式 (5.5.9) 求出电场和磁场, 显然在计算上比由麦克斯韦方程组直接求解电场和磁场要简单。

5.5.3 平面波的一般概念

分析式 (5.5.13) 和式 (5.5.14) 可以得到关于时变电磁场的一些重要的结论:

(1) 产生时变电磁场的源是时变的电荷和电流, 但 t 时刻的电磁场是由 $t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}$ 时刻的源产生的, 场比源在时间上晚了 $\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}$, 也就是说, 由于 $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 是从源点到场点的距离, v 是时变场推进的速度, 所以 $\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}$ 就是某时刻从 \mathbf{r}' 产生的场推进到 \mathbf{r} 点时所用的时间。由于这种场随时间的变化比源的变化滞后, 动态位 \mathbf{A} 和 Φ 通常被称为**滞后位**。

(2) 时变电磁场的场量是波动方程的解, 因此称为电磁波。电磁波传播的速度和媒质的特性有关。在真空中

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

这正是光波在真空中的速度, 可见, 光波也是电磁波的一种。

(3) 在静态场中, 场和源是同时出现且同时消失的, 因此静态场也称为**束缚场**; 在时变场中, 场比源要滞后, t 时刻源中断时, 远区的场并没有立刻消失, 因为它是由 $t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}$ 时刻的源确定的。脱离开源的时变场由电场和磁场互相激发而形成电磁波向远处传播, 直至遇到障碍物被反射、吸收或损耗掉, 在无界真空中则会一直传播下去。这种现象称为**电磁辐射**, 远区的场称为**辐射场**。而时变电荷或电流 (辐射源) 附近的近区场在时间上基本与辐射源同步变化, 因此, 近区场称为**似稳场**, 有时也称做似静场或束缚场。

(4) 对于源和场量随时间按正弦律变化的正弦场, $\omega \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v} \right)$ 即表示相位, 频率越高时, $\frac{\omega}{v} = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ 越大; 在同一场点引起的相位差越大, 场量的滞后现象越明显, 电磁辐射现象也就越显著。这时, 距离源较近的区域也可能成为辐射区。因此, 用做发射电磁波的天线装置, 必须使用高频激励源。

本节思考和练习

5.10 试推导采用库伦规范时动态位满足的方程。

5.11 证明电场 $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x 100 \cos(10^8 t - 0.5z)$ V/m 是波动方程的解。该电磁波沿哪个方向传播？传播的速度是多少？

本章小结

一、麦克斯韦方程组

时变电磁场的基本方程——麦克斯韦方程组是整个电磁场理论的精髓，可写为积分和微分两种数学形式。

积分形式：

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint_{\mathcal{V}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\mathcal{V}} \rho d\tau$$

微分形式：

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

其中，在线性、各向同性媒质中，场量之间的本构关系为

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{J}_C = \sigma \mathbf{E}$$

麦克斯韦方程组揭示了场和源的全部关系，电荷和电流是产生电磁场的根源，而电场和磁场一经产生，又可互相激发，互为涡旋源。

在无源区（ $\mathbf{J} = 0$ 、 $\rho = 0$ 、 $\sigma = 0$ ），麦克斯韦方程组简化为两个旋度方程：

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

这时电场和磁场都满足波动方程：

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

说明时变电磁场具有波动性，可形成电磁波。

二、时变场的边界条件

在不同介质分界面上，时变电场和磁场应满足边界条件。

矢量形式：

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_S$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0$$

标量形式：

$$H_{1t} - H_{2t} = J_{ST}$$

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= 0 & B_{1n} &= B_{2n} \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \rho_s & D_{1n} - D_{2n} &= \rho_s \end{aligned}$$

理想导体表面边界条件为

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 &= \mathbf{J}_s & H_{1t} &= J_{sT} \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 &= 0 & E_{1t} &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 &= 0 & B_{1n} &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 &= \rho_s & D_{1n} &= \rho_s \end{aligned}$$

理想导体表面的边界条件说明, 在导体表面电场总是与导体垂直, 磁场总是与导体平行, 导体内部没有电磁场。

三、时变场的动态位

麦克斯韦方程组的求解方法之一是引入标量电位 Φ 和矢量磁位 \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

在洛伦兹条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

下, 它们满足达朗贝尔方程:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \quad \nabla^2 \Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$

方程的解为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\tau'} \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'$$

这表明, 动态位是滞后位, 时变电磁场在一定条件下可以形成电磁辐射, 以电磁波的形式在空间或媒质中传播, 传播的速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s (真空中)}$$

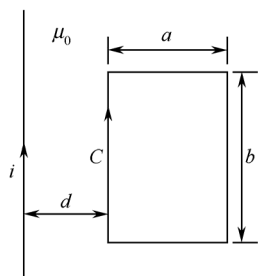
习 题 五

5.1 如题 5.1 图所示, 一根通以电流 i 的无限长直导线旁有一矩形线框 C , 二者共面。求以下两种情况下线圈 C 中的感应电动势 e :

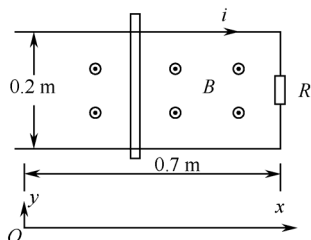
- (1) $i = I_0 e^{-\lambda t}$, 线圈 C 不动;
- (2) $i = I_0 \cos \omega t$, 同时线圈 C 以速度 v 向右运动。

5.2 如题 5.2 图所示, 在时变磁场 $\mathbf{B} = \mathbf{a}_z 5 \cos \omega t$ (mT) 中, 一导体滑杆在两根平行

导体轨上滑动, 滑杆的位置由 $x = 0.35(1 - \cos \omega t)$ (m) 确定, 轨道终端的电阻 $R = 0.2 \Omega$, 求电流 i 。



题 5.1 图



题 5.2 图

- 5.3** 一个闭合回路 C 的电阻为 R , 如果回路 C 所包围的磁通在一段时间内从 Φ_1 变化到了 Φ_2 , 证明回路 C 中流过的总电量为 $Q = (\Phi_1 - \Phi_2)/R$, 它与这段时间的长短、磁通随时间如何变化无关。
- 5.4** 一个电子 ($e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$) 沿直线轨道以 $v = 10^6 \text{ m/s}$ 的速度运动, 在与轨道垂直的平面内做一个半径为 5 cm 的圆, 圆心在直线轨道上。求: 当电子距此圆心 5 cm 时通过圆面积的位移电流。
- 5.5** 一个同轴圆柱形电容器, 内、外导体半径分别为 a 和 b , 长为 l 。设外加低频电压 $u(t) = V_0 \sin \omega t$, 试计算通过半径为 ρ ($a \leq \rho \leq b$) 的圆柱面的总位移电流, 并证明它与 ρ 无关, 等于电容器的电流。
- 5.6** 一个圆盘状平行板电容器半径为 R , 两极间距离为 d , 中间是空气, 外加低频电压 $u(t) = V_0 \cos \omega t$, 忽略边缘效应, 问 (1) 此电容器储存的磁能是多少? (2) 对应的分布电感是多少? 并画出集中参数的等效电路。
- 5.7** 一个圆盘状平行板电容器半径为 R , 两极间距离为 d , 极板间充满电导率为 σ , 电容率为 ϵ , 磁导率为 μ 的介质, 外加低频电压 $u(t) = V_0 \sin \omega t$ 。忽略边缘效应, (1) 求电容器中任意一点的 \mathbf{B} ; (2) 由电容器中储存的磁能计算该电容器具有分布电感; (3) 画出集中参数等效电路; (4) 保持电容量不变, 可采取哪些措施减小分布电感?
- 5.8** 设有 N 匝的圆柱形长电感线圈, 半径为 a , 高为 h , 通以电流 $i(t) = I_0 \cos \omega t$ 。忽略边缘效应, 问: (1) 该线圈储存的电场能是多少? (2) 对应的分布电容 C 是多少? (3) 画出集中参数等效电路; (4) 保持电感量不变, 可采取哪些措施减小分布电容?
- 5.9** 已知在空气中 $\mathbf{E} = \mathbf{a}_y 0.1 \sin(10\pi x) \cos(6\pi \times 10^9 t - \beta z)$, 求 \mathbf{H} 和 β 。
- 5.10** 已知在空气中的球面波电场为 $\mathbf{E} = \mathbf{a}_\theta \frac{E_0}{r} \sin \theta \cos(\omega t - kr)$, 求 \mathbf{H} 和 k 。
- 5.11** 在通以 $f = 1 \text{ GHz}$ 的电流的情况下, 求下列三种物质中位移电流密度与传导电流密度的比值 J_D / J_C (用计算表明: 即使在微波频率下, 良导体中的位移电

流也是可以忽略的)。

(1) 瓷: $\varepsilon_r = 5.7$, $\sigma = 10^{-14} \text{ S/m}$;

(2) 铜: $\varepsilon_r \approx 1$, $\sigma = 5.7 \times 10^7 \text{ S/m}$

(3) 海水: $\varepsilon_r = 81$, $\sigma = 4 \text{ S/m}$ 。

5.12 两无限大理想导体平面限定的区域 ($0 \leq z \leq d$) 中存在着如下的电磁场

$$\begin{aligned} E_y &= E_0 \sin \frac{\pi z}{d} \cos(\omega t - k_x x) \\ H_x &= \frac{\pi E_0}{\omega \mu_0 d} \cos \frac{\pi z}{d} \sin(\omega t - k_x x) \\ H_z &= \frac{k_x E_0}{\omega \mu_0} \sin \frac{\pi z}{d} \cos(\omega t - k_x x) \end{aligned}$$

其中 $\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = k_x^2 + (\pi/d)^2$; d 、 k_x 、 ω 、 E_0 均为常数。在此区域中:

- (1) 验证该电磁波 (TE 波) 满足无源区的麦克斯韦方程;
- (2) 验证它满足理想导体表面的边界条件, 并求出表面电荷和感应面电流;
- (3) 求位移电流分布。

5.13 在无源区有一个平面波的电磁场为

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

其中 \mathbf{E}_0 、 \mathbf{B}_0 和 $\mathbf{k} = a_x k_x + a_y k_y + a_z k_z$ 是常矢量, $\mathbf{r} = a_x x + a_y y + a_z z$ 是场点的位置矢量, 试证: (1) \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 满足波动方程的条件是 $\frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ ($k = |\mathbf{k}|$);

(2) \mathbf{E} 、 \mathbf{B} 满足麦克斯韦方程的条件是 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ 。

第6章

电磁兼容基础

电磁兼容学是一门综合性的边缘学科，其核心是电磁波，其理论基础涵盖很广泛，包括数学、电磁场理论、电路理论、微波理论与技术、天线与电波传播理论、通信理论、材料科学、计算机与控制理论、机械工艺学、核物理学、生物医学及法律学、社会科学等内容。本章仅就电磁干扰的数学描述方法、分贝的概念与应用和电磁环境及电磁污染途径进行简单的介绍。

➔ 6.1 电磁干扰的数学描述方法

电磁干扰和有用信号一样可以在时域和频域内进行描述。电磁干扰信号除了极少数为恒定的情况外，绝大部分的干扰信号都是时变的。它们可以是正弦的、非正弦的，周期性的、非周期性的，甚至是脉冲波形式的。但是，无论从耦合途径分析，还是进一步采取消除干扰措施，对时变的干扰信号用频率的方法分析不仅方便，有时甚至是必需的。例如，在考虑滤波和屏蔽时都要知道干扰源所含的频率成分。因此，就有必要讨论信号的时、频域之间的转换及它们之间存在的一些基本关系。

6.1.1 周期性函数的傅里叶变换

设 $f(t)$ 为周期性干扰信号，周期为 T ，即

$$f(t) = f(t + nT) \quad (6.1.1)$$

其傅里叶变换公式为

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (6.1.2)$$

从而可知各频率分量的幅值、相位。式中， A_n ， B_n ， φ_n 的计算公式可在许多书中找到，也可直接用工具软件求得。

周期信号的频谱由不连续的谱线组成，每一条线代表一个正弦分量，且每个高次频率都是基频 $f_1=1/T$ [式 (6.1.2) 中的 $n=1$] 的整数倍 ($f_n = nf_1, \Delta f = f_1 = 1/T$)。各高次频率的幅值都随频率的增高而逐渐减小。图 6-1 所示为脉宽都是 τ 、但周期 T 不同的矩形脉冲的频谱图。周期 T 越大，谱线越密。若 $T \rightarrow \infty$ ，谱线将完全连续。

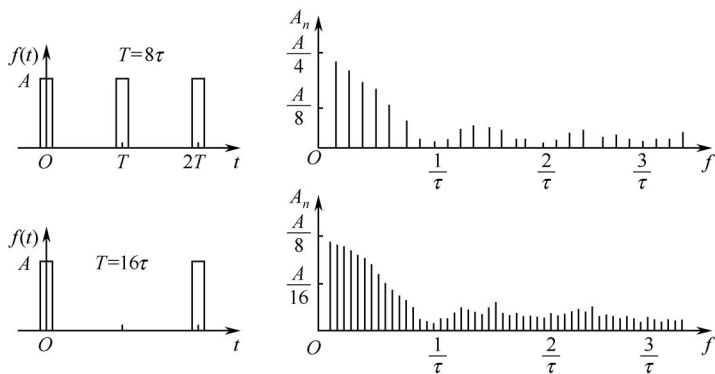


图 6-1 周期性矩形脉冲的频谱

6.1.2 非周期性干扰信号的频谱分析

对非周期性信号 $f(t)$ ，傅里叶变换为傅里叶积分

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \tag{6.1.3}$$

当周期 $T \rightarrow \infty$ 时，式 (6.1.2) 中的变量 $n\omega$ 由离散量变为连续量 ω ，求和 (Σ) 变为积分 (\int)，因此非周期脉冲的谱线变为连续谱。单个幅度为 A 、脉冲宽度为 τ 的方波脉冲的频谱为

$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos \omega t dt = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2} \tag{6.1.4}$$

其图形如图 6-2 所示。表 6-1 给出了几种简单脉冲的频谱图。

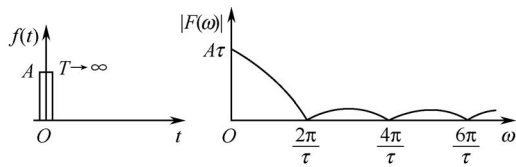
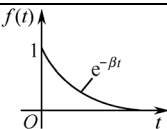
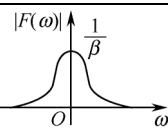
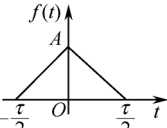
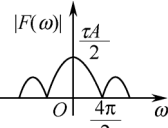
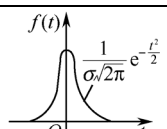
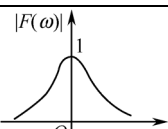


图 6-2 单个矩形脉冲的频谱

表 6-1 几种简单脉冲的频谱图

时域波形	幅频特性

续表

时域波形	幅频特性
	
	
	

6.1.3 脉冲信号的傅里叶积分及快速时/频域转换

在 EMC 问题中经常遇到非周期性的脉冲干扰。例如, 雷电、静电及核脉冲信号的特征多用其波形的上升时间参数 t_r (脉冲上升到峰值的 10% 与上升到峰值的 90% 之间的时间) 及下降时间参数 t_d (脉冲上升到峰值的 50% 与下降至峰值的 50% 之间的时间) 来表示。图 6-3 显示了 t_r/t_d 是 5 ns/50 ns 的脉冲波形。通常又把 t_d 称为半脉宽时间。

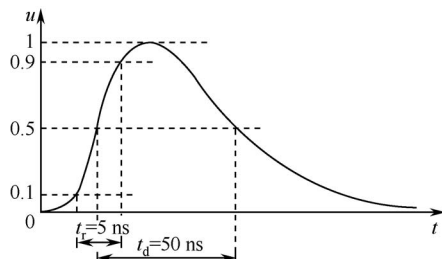


图 6-3 t_r/t_d 是 5 ns/50 ns 的脉冲波形

为方便起见, 对雷电及核脉冲等波形通常都用双指数函数表示, 即

$$i(t) = kI_0[e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}] \quad (6.1.5)$$

式中, I_0 为脉冲的峰值; α 和 β 分别是两个指数函数的衰减常数。

用式 (6.1.3) 即可分解出其中包含的频谱成分。图 6-4 画出了 1.2 μ s/50 μ s 的雷电脉冲及 2 ns/23 ns 的核电磁脉冲 (这是美国军用标准 MIL—STD—461E 中的值) 的波形及频谱图。在已知各种脉冲的 t_r 、 t_d 及峰值后, 可计算出波形的 α 、 β 及 k 值, 并可应用工具软件 (见 MATLAB) 调用快速傅里叶变换 FFT 画出波形及频谱图 (频谱曲线的直线部分向左延伸到零频)。不同脉冲波形的 α 、 β 及 k 值如表 6-2 所列。

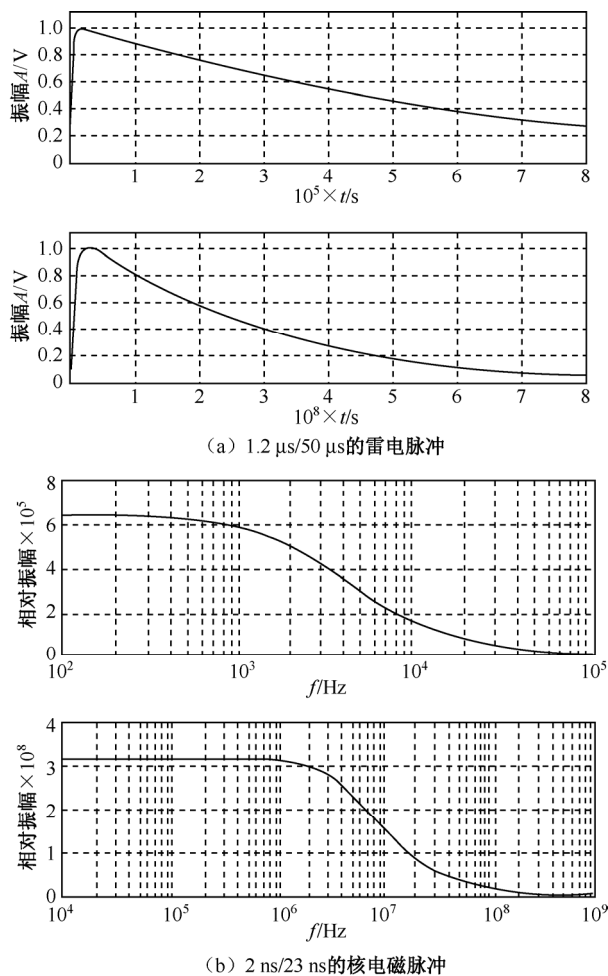


图 6-4 雷电脉冲及核电磁脉冲的波形及频谱图

表 6-2 常用双指数脉冲波形的衰减常数

双指数脉冲波形参数	衰减常数 α	衰减常数 β	系数 k
1.2 $\mu\text{s}/50 \mu\text{s}$ (雷电压波)	1.625×10^4	2.456×10^6	1.040 9
8 $\mu\text{s}/20 \mu\text{s}$ (雷电流波)	$1.289 5 \times 10^5$	$1.290 5 \times 10^5$	3 506.9
2.6 $\mu\text{s}/40 \mu\text{s}$ (雷电流波)	1.859×10^4	1.365×10^6	1.075 8
10 $\mu\text{s}/350 \mu\text{s}$ (雷电流波)	0.211×10^4	3.513×10^5	1.030 4
2 $\mu\text{s}/23 \mu\text{s}$ (核脉冲)	34.896×10^6	$1 461.857 \times 10^6$	1.122 4
0.7 $\mu\text{s}/60 \mu\text{s}$ (静电放电)	11.896×10^6	$3 661.857 \times 10^6$	1.022 2

显而易见，脉冲上升越陡，高频分量越丰富，ns 级脉冲比 μs 级脉冲所含的高频分量多 10^4 倍的数量级。例如，当 1.2 $\mu\text{s}/50 \mu\text{s}$ 的波形在频率为 1 kHz 时，谱线开始下降，频率到 100 kHz 时幅值趋于零；2 ns/23 ns 的波形谱线要到频率大于 1 kHz 以后开始下降，频率到 1 GHz 时幅值才趋于零。

为了直观、方便地看出脉冲波形所含的频率分量，在电磁兼容领域应用最大包络线法作快速变换。图 6-5 (a) 所示峰值为 A 的一次性梯形脉冲 $u(t)$ ，根据其上升时间 t_r 及半脉宽时间 t_d 可获得如图 6-5 (b) 所示的频谱特征 (图 6-5 (c) 所示是周期为 T 的梯形脉冲的频谱图)。以梯形脉冲为例是因为当 $t_r = 0$ 时，梯形脉冲变为矩形脉冲；当 $t_d = t_r$ 时，梯形脉冲变为三角形脉冲。因此，梯形脉冲包含了现实中大部分干扰脉冲。

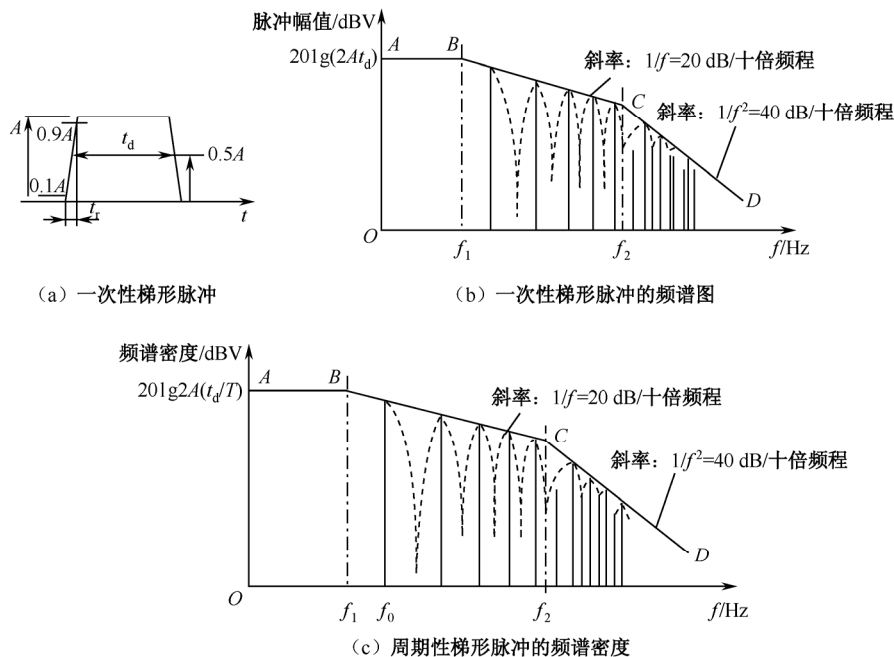


图 6-5 脉冲波及其频谱

图 6-5 (b)、(c) 中折线的两个转折点 f_1 、 f_2 取决于波形的上升和下降时间，即

$$f_1 = 1/(\pi t_d), \quad f_2 = 1/(\pi t_r) \quad (6.1.6)$$

式 (6.1.6) 是通过以下推导得来的。

对一次性梯形脉冲，其频谱密度为

$$u(f) = 2At_d \frac{\sin \pi f t_d}{\pi f t_d} \times \frac{\sin \pi f t_r}{\pi f t_r} \quad (6.1.7)$$

当 $f \leq f_1$ 时，正弦函数可近似等于它的幅角。频谱的包络线是常数，即平行于横轴，所以有

$$u(f) = 2At_d \quad (6.1.8)$$

即图 6-5 (b) 中的 AB 段。若用 dB 表示，则 AB 段的幅值为 $20\lg(2At_d)$ 。

当 $1/\pi t_d \leq f \leq 1/\pi t_r$ 时，令 $\sin \pi f t_d = 1$ (最坏状态)，并且当 t_r 很小时，由于 $\sin \pi f t_r \approx \pi f t_r$ ，则 $\sin \pi f t_r / (\pi f t_r) = 1$ ，所以在图 6-5 (c) 的 BC 段内有

$$u(f) = 2At_d \frac{1}{\pi f t_d} = 2A/\pi f \quad (6.1.9)$$

表示幅度正比于 $1/f$ ，所以 BC 段的斜率为 $1/f$ ，表示频率每增加 10 倍，幅值衰减 10 倍。图中指出该段的变化率为：频率每增加 10 倍幅值下降 20 dB。若用 dB 表示，则式 (6.1.9) 为

$$u(f)_{\text{dB}\mu\text{V}} = 20 \lg \frac{2A/\pi f}{1\mu\text{V}} (\text{dB}\mu\text{V})$$

注意，这里是以 $\text{dB}\mu\text{V}$ 为计量基础，上式中的 A 应以 μV 为单位 (dBV 与 $\text{dB}\mu\text{V}$ 差 120 dB)。

当 $f > 1/\pi t_r$ 时，不仅取 $\sin \pi f t_d = 1$ ，而且 $\sin \pi f t_r = 1$ （最坏状态），则

$$u(f) = 2A/\pi^2 f^2 t_r \quad (6.1.10)$$

也就是说，幅度正比于 $1/f^2$ ，所以 CD 段的斜率为 $1/f^2$ ，表示频率每增加 10 倍，幅值衰减 100 倍，即幅度下降 40 dB。用 dB 表示则为

$$u(f)_{\text{dB}\mu\text{V}} = 20 \lg \frac{2A}{\pi^2 f^2 t_r \times 1\mu\text{V}} (\text{dB}\mu\text{V})$$

用这样的近似变换方法，可以很快地从脉冲的上升时间及半脉宽时间知道各种脉冲信号的频谱特征。对周期性的脉冲也一样使用，并且它的基频 $f_0=1/T$ (T 为周期)， AB 段的值为 $2At_d/T$ ，如图 6-5 (c) 所示。

对于以双指数函数表示的脉冲波形，除了用本节介绍的快速傅里叶变换及 MATLAB 工具外，也可用此法，虽然精度要差些，但数量级相当。

➔ 6.2 分贝的概念与应用

6.2.1 分贝的定义及换算关系

在电磁兼容测量中，常用不同的单位表述测量值的大小。分贝 (decibel) 这个单位常被工程技术人员采用。

1. 功率

在电磁兼容测量中，干扰的幅度可用功率来表述。功率的基本单位为 W (瓦)，为了表示变化范围很宽的数值关系，常常应用两个相同量比值的常数对数，以贝尔 (bel) 为单位。对于功率损失，贝尔定义为

$$P_{\text{bel}} = \lg \frac{P_{\lambda}}{P_{\text{出}}} \quad (6.2.1)$$

当输入功率等于 10 倍的输出功率时，其损失为 $\lg 10 = 1\text{bel}$ ；换言之，1bel 的损失对应于 10:1 的功率损失。

但是，贝尔是一个较大的值，为使用方便，工程技术人员常采用 1/10 的贝尔单位 decibel，简称为 dB (分贝)。因此 dB 被定义为

$$P_{\text{dB}} = 10 \lg \frac{P_{\lambda}}{P_{\text{出}}} \quad (6.2.2)$$

dB 也常用来表示两个相同量比值的大小, 如功率 P_1 和 P_2 的比值为 P_{dB} , 则有

$$P_{\text{dB}} = 10 \lg \frac{P_2}{P_1} \quad (6.2.3)$$

式中, P_1 和 P_2 应采用相同的单位。必须明确, dB 仅为两个量的比值, 是量纲为 1 的。随着 dB 表示式中的基准参考量的单位不同, dB 在形式上也带有某种量纲。比如基准参考量 P_1 为 1 W, 则 P_2/P_1 是相对于 1 W 的比值, 即以 1 W 为 0 dB。此时是以带有功率量纲的分贝 dBW 表示 P_2 的, 所以

$$P_{\text{dB(W)}} = 10 \lg \frac{P_{\text{W}}}{1 \text{ W}} = 10 \lg P_{\text{W}} \quad (6.2.4)$$

式中, P_{W} 是实际测量值, 以 W 为单位; $P_{\text{dB(W)}}$ 是用 dB(W) 表示的测量值。

功率测量单位通常还采用 dB(mW) (分贝(毫瓦))。它以 1 mW 为基准参考量, 表示为 0 dB(W), 即

$$P_{\text{dB(mW)}} = 10 \lg \frac{P_{\text{mW}}}{1 \text{ mW}} = 10 \lg P_{\text{mW}} \quad (6.2.5)$$

$$\text{显然,} \quad 0 \text{ dB(mW)} = -30 \text{ dB(W)} \quad (6.2.6)$$

类似地, 1 μW 作为基准参考量, 表示 0 dB(μW), 称为分贝(微瓦)。dB(W), dB(mW), dB(μW) 的换算关系如下:

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{dB(W)}} &= 10 \lg P_{\text{W}} \\ P_{\text{dB(mW)}} &= 10 \lg P_{\text{mW}} = 10 \lg P_{\text{W}} + 30 \text{ dB(mW)} \\ P_{\text{dB}(\mu\text{W})} &= 10 \lg P_{\mu\text{W}} = 10 \lg P_{\text{W}} + 60 \text{ dB}(\mu\text{W}) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.7)$$

2. 电压

电压 [单位为 V (伏)、mV (毫伏)、 μV (微伏)] 与电压的分贝 [单位为 dB(V), dB(mV), dB(μV)] 的换算关系为

$$\left. \begin{aligned} U_{\text{dB(V)}} &= 20 \lg \frac{U_{\text{V}}}{1 \text{ V}} = 20 \lg U_{\text{V}} \\ U_{\text{dB(mV)}} &= 20 \lg \frac{U_{\text{mV}}}{1 \text{ mV}} = 20 \lg U_{\text{mV}} = 20 \lg U_{\text{V}} + 60 \text{ dB(mV)} \\ U_{\text{dB}(\mu\text{V})} &= 20 \lg \frac{U_{\mu\text{V}}}{1 \mu\text{V}} = 20 \lg U_{\mu\text{V}} = 20 \lg U_{\text{V}} + 120 \text{ dB}(\mu\text{V}) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.8)$$

3. 电流

电流 [单位为 A (安)、mA (毫安)、 μA (微安)] 与电流的分贝 [单位为 dB(A), dB(mA), dB(μA)] 的换算关系为

$$\left. \begin{aligned} U_{\text{dB(A)}} &= 20 \lg \frac{U_A}{1 \text{ A}} = 20 \lg U_A \\ U_{\text{dB(mA)}} &= 20 \lg \frac{U_{\text{mA}}}{1 \text{ mA}} = 20 \lg U_{\text{mA}} = 20 \lg U_A + 60 \text{ dB(mA)} \\ U_{\text{dB(}\mu\text{A)}} &= 20 \lg \frac{U_{\mu\text{A}}}{1 \mu\text{A}} = 20 \lg U_{\mu\text{A}} = 20 \lg U_A + 120 \text{ dB(}\mu\text{A)} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.9)$$

4. 电场强度

电场强度的单位为 V/m (伏每分)、mV/m (毫伏每分)、 $\mu\text{V/m}$ (微伏每分), 电场强度的分贝单位为 dB (V/m), dB (mV/m), dB ($\mu\text{V/m}$), 表示为

$$E_{\text{dB(V/m)}} = 20 \lg \frac{E_{\text{V/m}}}{1 \text{ V/m}} = 20 \lg E_{\text{V/m}} \quad (6.2.10)$$

$$\text{因为} \quad 1 \text{ V/m} = 10^3 \text{ mV/m} = 10^6 \mu\text{V/m} \quad (6.2.11)$$

$$\text{则} \quad 1 \text{ V/m} = 0 \text{ dB(V/m)} = 60 \text{ dB(mV/m)} = 120 \text{ dB(}\mu\text{V/m)} \quad (6.2.12)$$

5. 磁场强度

磁场强度 H 的分贝单位 dB (A/m) 是以 1 A/m 为基准的磁场强度的分贝数, 同理可定义 dB (mA/m) 和 dB ($\mu\text{A/m}$) 等。有些标准 (例如在 GJB151-86 中) 使用磁通密度 B 的单位, 考虑到

$$B = \mu H \quad (6.2.13)$$

式中, $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 。所以, 二者在数量上有如下关系:

$$\{B\}_{\text{dB(T)}} = \{H\}_{\text{dB(A/m)}} - 118 \text{ dB} \quad (6.2.14)$$

$$\text{因为} \quad 1 \text{ T(特拉斯)} = 10^{12} \text{ pT} \quad (6.2.15)$$

则 $0 \text{ dB(T)} = 240 \text{ dB(pT)}$, 因此

$$\begin{aligned} \{B\}_{\text{dB(pT)}} &= \{H\}_{\text{dB(T)}} + 240 \text{ dB} \\ \{B\}_{\text{dB(pT)}} &= \{H\}_{\text{dB(A/m)}} + 122 \text{ dB} \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

6. 坡印廷矢量

坡印廷矢量的基本单位为 W/m^2 , 常用单位为 mW/cm^2 或 $\mu\text{W/cm}^2$ 。它们之间的关系为

$$S_{\text{W/m}^2} = 0.1 S_{\text{mW/cm}^2} = 10^2 S_{\mu\text{W/cm}^2} \quad (6.2.17)$$

采用分贝表示时, 有

$$S_{\text{dB(W/m}^2)}} = S_{\text{dB(mW/cm}^2)}} - 10 \text{ dB} = S_{\text{dB(}\mu\text{W/cm}^2)}} + 20 \text{ dB} \quad (6.2.18)$$

7. 宽带电磁干扰 (EMI) 度量单位

宽带 EMI 测量单位是将上述规定的分贝单位再归一化为单位带宽即可得出。例如,

dB (mV/kHz) 是归一化为每 1 kHz 带宽内的以 1mV 为基准的电压分贝数。

表 6-3 列出了电磁发射和敏感度极限值的单位。

表 6-3 电磁发射和敏感度极限值的单位

电磁发射及敏感度	窄 带	宽 带
传导发射	dB (V), dB (mV), dB (μ V) 等 dB (A), dB (mA), dB (μ A) 等	dB (V/kHz), dB (mV/MHz) 等 dB (A/kHz), dB (mA/MHz) 等
传导敏感度	dB (V), dB (mV), dB (μ V) 等	dB (V/kHz), dB (mV/MHz) 等
辐射发射	dB (V/m), dB (T) 等	dB[V/(m · kHz)] 等 dB (T/kHz) 等
辐射敏感度	dB (V/m), dB (T) 等	dB[V/(m · kHz)] 等 dB (T/MHz) 等

6.2.2 分贝的应用

1. 将 40 W 转换为 dB (W)

$$(40 \text{ W})_{\text{dB(W)}} = 10 \lg \frac{40 \text{ W}}{1 \text{ W}} = 10 \lg 40 = 10 \times 1.602 = 16 \text{ dB(W)}$$

2. 将参考单位改为 dB (mW)

$$1 \text{ W} = 10^3 \text{ mW}$$

则

$$0 \text{ dB(W)} = 30 \text{ dB(mW)}$$

因此, 16 dB (W) 可表示为 30 dB (mW) + 16 dB (mW) = 46 dB (mW)。

3. 将 8 mV 转换为 dB (μ V)

$$\begin{aligned} (8 \text{ mV})_{\text{dB}(\mu\text{V})} &= (8 \times 10^3 \mu\text{V})_{\text{dB}(\mu\text{V})} = 20 \lg 8 + 20 \lg(10^3) \\ &= (18 \text{ dB}(\mu\text{V}) + 60 \text{ dB}(\mu\text{V})) = 78 \text{ dB}(\mu\text{V}) \end{aligned}$$

6.3 电磁环境及电磁污染途径

6.3.1 自然电磁环境

自然电磁干扰源存在于地球和宇宙, 自然电磁现象会产生电磁噪声。由自然界的电磁现象产生的比较典型的电磁噪声有:

- ① 大气噪声, 如雷电;
- ② 太阳噪声, 太阳黑子活动时产生的磁暴;
- ③ 宇宙噪声, 来自银河系;
- ④ 静电放电 (ESD)。

6.3.2 人为电磁干扰

人为干扰分别来自有意发射干扰源和无意发射干扰源。

有意发射干扰源是专用于辐射电磁能的设备，例如，广播、电视、通信、雷达及导航等发射设备，是通过向空间发射有用信号的电磁能量来工作的；而它们对不需要这些信号的电子系统或设备将构成功能性干扰，并且是电磁环境的重要污染源。

有许多装置都无意地发射电磁能量，例如，汽车的点火系统、各种不同的用电装置和带电动机的装置、照明装置、霓虹灯广告、高压电力线及工业、科学和医用的设备、接收机的本机振荡辐射等都在无意地发射电磁能量。这种发射可能是向空间的辐射，也可能是沿导线的传导发射，所发射的电磁能是随机的或是有规律的，一般占有非常宽的频带或离散频谱，所发射的功率量级可从 pW （皮瓦）到 MW （兆瓦）。

任何电气及电子设备都可能产生人为干扰，这里只是列出一些容易产生干扰的设备。

① 家用电器和民用设备：

- 有触电电器，如电冰箱、电熨斗、电热被褥、电磁开关及继电器等。
- 使用整流子电动机的机器，如电钻、电动刮胡刀、电按摩器、吸尘器、电动搅拌机及牙科医疗器械等。
- 家用电力半导体器件装置，如硅整流调光器、开关电源等。

② 高频设备：

- 工业用高频设备，如塑料热合机、高频加热器及高频电焊机等。
- 高频医疗设备，如甚高频或超高频理疗装置、高频手术刀、电测仪及 X 光机等。

③ 电力设备：

- 电力传动设备，如各种直流、交流伺服电动机、步进电机、电磁阀及接触器等。
- 电力电子器件组成的变流装置，如可控整流器、逆变器、变频器、斩波器、无触点开关、交流调压器、UPS 电源及高频开关电源等。
- 电力传输设备，如高压电力传输线、高压断路器及变压器等。
- 电气化铁路，如电力机车、接触网等。

④ 内燃机：包括点火系统、发电机、电压调节器及电刷等。

⑤ 无线电发射和接收设备：包括移动通信系统、广播、电视、雷电及导航设备等。

⑥ 高速数字电路设备，包括计算机及其相关设备。

各种不同的干扰源可能是周期性的，其频率范围可以从 0 Hz 到几十 kHz 、几 MHz ，甚至几 GHz 或更高。干扰信号也可能是非周期性或脉冲形式的。能量也可能是极微弱的或者是 MW 级的。表 6-4 列出了经常遇到的一些干扰源的频谱范围。

表 6-4 常遇干扰源的频谱范围

源	频 谱	源	频 谱
地磁测向	<3 Hz	雷电放电	几 Hz~几百 MHz
探测烧焦的金属	3~30 Hz	电视	30 MHz~3 GHz
直流或工频输电	0 Hz 或 50 Hz/60 Hz	移动通信（包括移动电话）	30 MHz~3 GHz
无线电灯塔气象预报站	30~300 kHz	微波炉	300 MHz~3 GHz
电动机	10~400 kHz	核脉冲	高达 GHz
照明（荧光灯）	0.1~3.0 MHz	海上导航	10 kHz~10 GHz
电晕放电	0.1~10 MHz	工科、医用高频设备	几十 kHz~几十 GHz
直流电源开关电路	100 kHz~30 MHz	无线电定位	1~100 GHz
广播	150 kHz~100 MHz	空间导航卫星	1~300 GHz
电源开关设备	100 kHz~300 MHz	先进的通信和遥测系统	30~300 GHz

6.3.3 电磁干扰三要素

电磁兼容学科研究的主要内容是围绕构成干扰的三要素进行的，即电磁骚扰源、传输途径和敏感设备。

1. 电磁骚扰源

电磁骚扰（electromagnetic disturbance）的定义是：“任何可能引起装置、设备或系统性能降低或对有生命或无生命物质产生损害作用的电磁现象。”（GB/T 4365—1995）电磁骚扰可能是电磁噪声、无用信号或传播媒介自身的变化。电磁噪声（electromagnetic noise）的定义是：“一种明显不传送信息的时变电磁现象，它可能与有用信号叠加或组合。”（GB/T 4365—1995）例如，电气设备运行中经常产生的放电噪声、浪涌噪声和振荡噪声等不带任何有用信息。无用信号指一些功能性的信号，如广播、电视、雷达等，本身是有用信号；但如果干扰其他设备的正常工作，则对被干扰的设备而言，它们就是无用信号，所以电磁骚扰的含义比电磁噪声更广泛一些。有时人们常把“骚扰”、“噪声”和“干扰”混同起来。实际上“电磁干扰”是有明确定义的，即：“由电磁骚扰引起的设备、传输通道或系统性能的下降。”（GB/T 4365—1995）“骚扰”是一种客观存在，只有在影响敏感设备正常工作时才构成“干扰”。骚扰源可分为自然骚扰源和人为骚扰源。骚扰源的研究包括其发生的机理、时域和频域的定量描述，以便从源端来抑制骚扰的发射。

2. 传输途径

骚扰的传输途径有两条，通过空间辐射和通过导线传导，即辐射发射和传导发射。辐射发射主要研究在远场条件下骚扰以电磁波的形式发射的规律及在近场条件下的电磁耦合。共模电流辐射也是重要的研究内容之一。传导发射讨论传输线的分布参数和电流的传输方式对噪声传输的影响，如共阻抗耦合、共模—差模电流转换等。

3. 敏感设备

敏感设备即受干扰设备。设备的抗干扰能力用电磁敏感度（susceptibility）来表示。

设备的电磁干扰敏感性的电平阈值越低, 即对电磁干扰越灵敏, 也即电磁敏感度越大, 抗干扰能力越差, 或称抗扰度 (immunity) 性能越低。反之, 接收器的电磁敏感度越低, 抗干扰能力也越高。采用不同的结构和选用不同的元器件都将大大影响设备的抗干扰能力。这些都是在设备或系统的设计阶段要考虑的。各种设备的抗扰度指标都可以从 EMC 手册中查到。

本章小结

(1) 周期性函数的傅里叶变换。

设 $f(t)$ 为周期性干扰信号, 周期为 T , 即

$$f(t) = f(t + nT)$$

其傅里叶变换公式为

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

(2) 非周期干扰信号的频谱分析。

非周期脉冲的谱线变为连续谱。单个幅度为 A 、脉冲为 τ 的方波脉冲的频谱为

$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A \cos \omega t dt = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2}$$

(3) 脉冲信号的傅里叶积分及快速时/频域转换。

脉冲上升越陡, 高频分量越丰富, ns 级的脉冲比 μ s 级的脉冲所含的高频分量多 10^4 倍的数量级。用近似变换方法, 可以很快地从脉冲的上升时间及半脉宽时间知道各种脉冲信号的频谱特征。

(4) 功率与功率分贝的换算关系。

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{dB(W)}} &= 10 \lg P_{\text{W}} \\ P_{\text{dB(mW)}} &= 10 \lg P_{\text{mW}} = 10 \lg P_{\text{W}} + 30 \text{ dB(mW)} \\ P_{\text{dB(}\mu\text{W)}} &= 10 \lg P_{\mu\text{W}} = 10 \lg P_{\text{W}} + 60 \text{ dB(}\mu\text{W)} \end{aligned} \right\}$$

(5) 电压与电压分贝的换算关系。

$$\left. \begin{aligned} U_{\text{dB(V)}} &= 20 \lg \frac{U_{\text{V}}}{1 \text{ V}} = 20 \lg U_{\text{V}} \\ U_{\text{dB(mV)}} &= 20 \lg \frac{U_{\text{mV}}}{1 \text{ mV}} = 20 \lg U_{\text{mV}} = 20 \lg U_{\text{V}} + 60 \text{ dB(mV)} \\ U_{\text{dB(}\mu\text{V)}} &= 20 \lg \frac{U_{\mu\text{V}}}{1 \mu\text{V}} = 20 \lg U_{\mu\text{V}} = 20 \lg U_{\text{V}} + 120 \text{ dB(}\mu\text{V)} \end{aligned} \right\}$$

(6) 电流与电流分贝的换算关系。

$$\left. \begin{aligned} U_{\text{dB(A)}} &= 20 \lg \frac{U_{\text{A}}}{1 \text{ A}} = 20 \lg U_{\text{A}} \\ U_{\text{dB(mA)}} &= 20 \lg \frac{U_{\text{mA}}}{1 \text{ mA}} = 20 \lg U_{\text{mA}} = 20 \lg U_{\text{A}} + 60 \text{ dB(mA)} \\ U_{\text{dB(}\mu\text{A)}} &= 20 \lg \frac{U_{\mu\text{A}}}{1 \mu\text{A}} = 20 \lg U_{\mu\text{A}} = 20 \lg U_{\text{A}} + 120 \text{ dB(}\mu\text{A)} \end{aligned} \right\}$$

(7) 电场强度与电场强度的分贝换算关系。

$$E_{\text{dB(V/m)}} = 20 \lg \frac{E_{\text{V/m}}}{1 \text{ V/m}} = 20 \lg E_{\text{V/m}}$$

因为

$$1 \text{ V/m} = 10^3 \text{ mV/m} = 10^6 \mu\text{V/m}$$

则

$$1 \text{ V/m} = 0 \text{ dB(V/m)} = 60 \text{ dB(mV/m)} = 120 \text{ dB(}\mu\text{V/m)}$$

(8) 磁场强度 H 的分贝单位 dB(A/m) 是以 1 A/m 为基准的磁场强度的分贝数, 同理可定义 dB(mA/m) 和 $\text{dB(}\mu\text{A/m)}$ 等。有些标准 (如在 GJB151—86 中) 使用磁通密度 B 的单位, 考虑到

$$B = \mu H$$

式中, $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 。所以二者在数量上有如下关系:

$$\{B\}_{\text{dB(T)}} = \{H\}_{\text{dB(A/m)}} - 118 \text{ dB}$$

因为

$$1 \text{ T(特拉斯)} = 10^{12} \text{ pT}$$

则 $0 \text{ dB(T)} = 240 \text{ dB(pT)}$, 因此

$$\{B\}_{\text{dB(pT)}} = \{H\}_{\text{dB(T)}} + 240 \text{ dB}$$

$$\{B\}_{\text{dB(pT)}} = \{H\}_{\text{dB(A/m)}} + 122 \text{ dB}$$

(9) 坡印廷矢量的基本单位为 W/m^2 , 常用单位为 mW/cm^2 或 $\mu\text{W/cm}^2$ 。它们之间的关系为

$$S_{\text{W/m}^2} = 0.1 S_{\text{mW/cm}^2} = 10^2 S_{\mu\text{W/cm}^2}$$

采用分贝表示时, 有

$$S_{\text{dB(W/m}^2)}} = S_{\text{dB(mW/cm}^2)}} - 10 \text{ dB} = S_{\text{dB(}\mu\text{W/cm}^2)}} + 20 \text{ dB}$$

(10) 电磁兼容学科研究的主要内容是围绕构成干扰的三要素进行的, 即电磁骚扰源、传输途径和敏感设备。

习题六

6.1 已知 $V=1 \text{ mV}$, 请用 $V_{\text{dB(mV)}}$, $V_{\text{dB(}\mu\text{V)}}$, $V_{\text{dB(nV)}}$ 和 $V_{\text{dB(pV)}}$ 单位表示。

6.2 功率信号发生器 XG26, 最小输出功率为 10^{-8} mW , 最大输出功率为 27 W , 请换算成 dB(mW) 。

第7章

电磁兼容滤波器设计

电磁兼容滤波器设计是电磁兼容设计工程中一个非常重要的环节。有时设计的滤波器性能如何会决定整个电器设备是否能够正常工作。但因为电磁兼容滤波器的设计涉及的知识面非常广，所以设计出一个性能较好的滤波器并不是一件容易的事情。本章详细讲述电磁干扰滤波器的工作原理与分类，还将介绍一些常用的滤波元器件；最后，结合实际应用阐述滤波器的正确选用方法与安装技术。

→ 7.1 电磁干扰滤波器

滤波器之所以能够成为抑制电磁干扰的重要方法之一，是因为滤波器可以把不需要的电磁能量即电磁干扰减少到满意的工作电平上，正因为如此，滤波器是防护传导干扰的主要措施，如电源滤波器解决传导干扰问题。滤波器同时也是解决辐射干扰的重要武器，如抑制无线电干扰，通常在发射机的输出端和接收机输入端安装相应的电磁干扰滤波器，滤掉干扰信号，以达到兼容的目的。

7.1.1 电磁干扰滤波器的工作原理

电磁干扰滤波器的工作原理与普通滤波器一样，它能允许有用信号的频率分量通过，同时又阻止其他干扰频率分量通过。其方式有两种：一种是不让无用信号通过，并把它们反射回信号源；另一种是把无用信号在滤波器里消耗掉。

7.1.2 电磁干扰滤波器的主要特性

滤波器最主要的特征参数有额定电压、额定电流、频率特性、输入/输出阻抗、插入损耗及传输频率特性等。

(1) 额定电压：指输入滤波器的最高允许电压值。若输入滤波器的电压过高，会使内部电容损坏。

(2) 额定电流：指在额定电压和规定环境温度条件下，滤波器所允许的最大连续工作电流。一般使用温度越高其允许的工作电流越小。同时，工作电流还与频率有关：工作频率越高，其允许的电流越小。

(3) 频率特性：滤波器的频率特性是描述其抑制干扰能力的参数，通常用中心频率、截止频率及上升和下降斜率表示。

(4) 输入/输出阻抗：从信号源到滤波器输入的阻抗称为输入阻抗，滤波器输出到接收电路的阻抗称为输出阻抗。选择滤波器需要考虑阻抗匹配，以防止信号衰减。

(5) 插入损耗：描述滤波器性能的最主要参量是插入损耗，插入损耗的大小随工作频率不同而改变。插入损耗的定义是：

$$L_{in} = 20 \lg \frac{V_1}{V_2} \quad (7.1.1)$$

式中， V_1 ——信号源通过滤波器在负载阻抗上建立的电压（V）； V_2 ——不接滤波器时信号源在同一负载阻抗上建立的电压（V）； L_{in} ——插入损耗（dB）。

(6) 传输频率特性：滤波器最重要的是其传输频率特性，可用对数幅频特性 $20 \lg A$ 来表示。在抗干扰技术中又称为衰减系数，即

$$\text{衰减系数} = 20 \lg \left| \frac{U_o(j\omega)}{U_i(j\omega)} \right| \quad (7.1.2)$$

式中， U_o ——滤波器的输出信号； U_i ——滤波器的输入信号； ω ——信号的角频率。

衰减系数的单位是 dB。本章应用自动控制原理知识，在不考虑输入和输出效应的情况下，通过求滤波器传递函数的方法求得衰减系数。

7.1.3 低通滤波器的结构选择

L 型、Π 型和 T 型滤波器具有相同的衰减系数，这是在没有考虑输入、输出效应情况下讨论的。实际上系统的输入、输出效应总是客观存在的，即信号源总是有内阻抗的，负载总是有输入阻抗的，要根据信号源的内阻和负载阻抗来选择低频滤波器的电器结构形式，如图 7-1 所示。

信号源 N	负载对象 G	滤波器形式
阻抗低	阻抗低	
阻抗低	阻抗高	
阻抗高	阻抗低	
阻抗高	阻抗高	

图 7-1 低通滤波器的结构选择

7.2 电磁干扰常用滤波器元件

7.2.1 电容器

电容器是电路中最基本的元件之一，利用电容滤除电路上的高频骚扰和对电源解耦是所有电路设计人员都熟悉的。但是，随着电磁干扰问题的日益突出，特别是干扰频率的日益提高，由于不了解电容的基本特性而达不到预期滤波效果的事情时有发生。下面将介绍一些容易被忽略的影响电容滤波性能的参数及使用电容器抑制电磁干扰时需要注意的事项。

1. 实际电容器的特性

电容器是基本的滤波器件，在低通滤波器中作为旁路器件使用。利用它的阻抗随频率升高而降低的特性，起到对高频干扰旁路的作用。但是，在实际使用中一定要注意电容器的非理想性。

1) 实际电容器的等效电路

实际电容器的电路模型如图 7-2 所示，它是由等效电感（ESL）、电容和等效电阻（ESR）构成的串联网路。电感分量是由引线和电容结构所决定的，电阻是介质材料所固有的。电感分量是影响电容频率特性的主要指标，因此，在分析实际电容器的旁路作用时，用 LC 串联网路来等效。

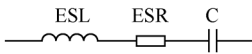


图 7-2 实际电容器的电路模型

2) 对滤波特性的影响

实际电容器的特性如图 7-3 所示，当角频率为 $1/\sqrt{LC}$ 时，会发生串联谐振，这时电容的阻抗最小，旁路效果最好。超过谐振点后，电容器的阻抗特性呈现电感阻抗的特性——随频率的升高而增加，旁路效果开始变差。这时，作为旁路器件使用的电容器就开始失去旁路作用。

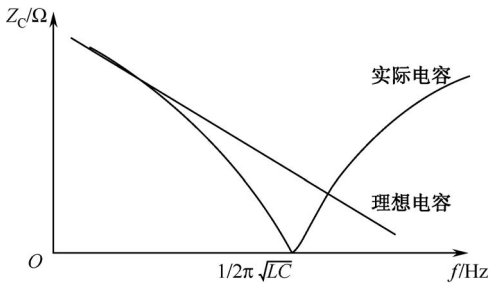


图 7-3 实际电容器的特性

理想电容的阻抗随着频率的升高而降低,而实际电容的阻抗具有如图 7-3 所示的频率特性,在频率较低时,呈现电容特性,即阻抗随频率的增加而降低,在某一点发生谐振,在这点电容的阻抗等于等效串联电阻 ESR。在谐振点以上,由于 ESL 的作用,电容阻抗随着频率的升高而增加,这时电容呈现电感的阻抗特性。在谐振点以上,由于电容的阻抗增加,因此对高频噪声的旁路作用减弱,甚至消失。

电容的谐振频率由 ESL 和 C 共同决定,电容值或电感值越大,则谐振频率越低,也就是电容的高频滤波效果越差。ESL 除了与电容器的种类有关外,电容的引线长度是一个十分重要的参数,引线越长,则电感越大,电容的谐振频率越低。因此在实际工程中,要使电容器的引线尽量短,电容器的正确安装方法和错误安装方法如图 7-4 所示。

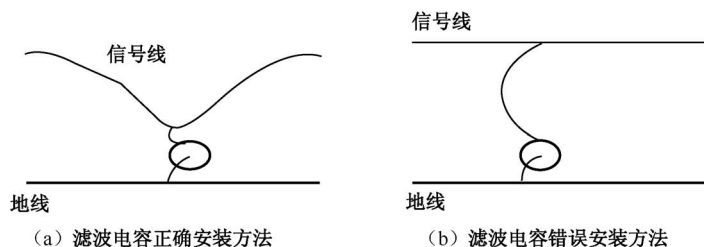


图 7-4 滤波电容的正确安装方法与错误安装方法

根据 LC 电路串联谐振的由来,谐振点不仅与电感有关,还与电容值有关,电容越大,谐振点越低。许多人认为电容器的容值越大,滤波效果越好,这是一种误解。电容越大对低频干扰的旁路效果虽然好,但是由于电容在较低的频率发生了谐振,阻抗开始随频率的升高而增加,因此对高频噪声的旁路效果变差。表 7-1 是不同容量瓷片电容器的自谐振频率,电容的引线长度是 1.6 mm。

表 7-1 不同容量瓷片电容器的自谐振频率

电 容 值	自谐振频率/MHz	电 容 值	自谐振频率/MHz
1 μF	1.7	820 pF	38.5
0.1 μF	4	680 pF	42.5
0.01 μF	12.6	560 pF	45
3 300 pF	19.3	470 pF	49
1 800 pF	25.5	390 pF	54
1 100 pF	33	330 pF	60

尽管从滤除高频噪声的角度看,不希望有电容谐振,但是电容谐振并不总是有害的。当要滤除的噪声频率确定时,可以通过调整电容的容量,使谐振点刚好落在骚扰频率上。

电磁兼容设计中使用的电容要求谐振频率尽量高,这样才能够较宽的频率范围(10 kHz~1 GHz)内起到有效的滤波作用。提高谐振频率的方法有两个,一个是尽量缩短引线的长度,另一个是选用电感较小的种类。从这个角度考虑,陶瓷电容是最理想的一种电容。

3) 温度的影响

由于电容器中的介质参数受到温度变化影响，因此电容器的电容值也随着温度变化。不同的介质随温度变化的规律不同，有些电容器的容量当温度升高时会减小 70% 以上，常用的滤波电容为瓷介质电容，瓷介质电容器的种类有超稳定型：COG 或 NPO；稳定型：X7R；通用型：Y5V 或 Z5U，共 3 种。不同介质的电容器的温度特性如图 7-5 所示。

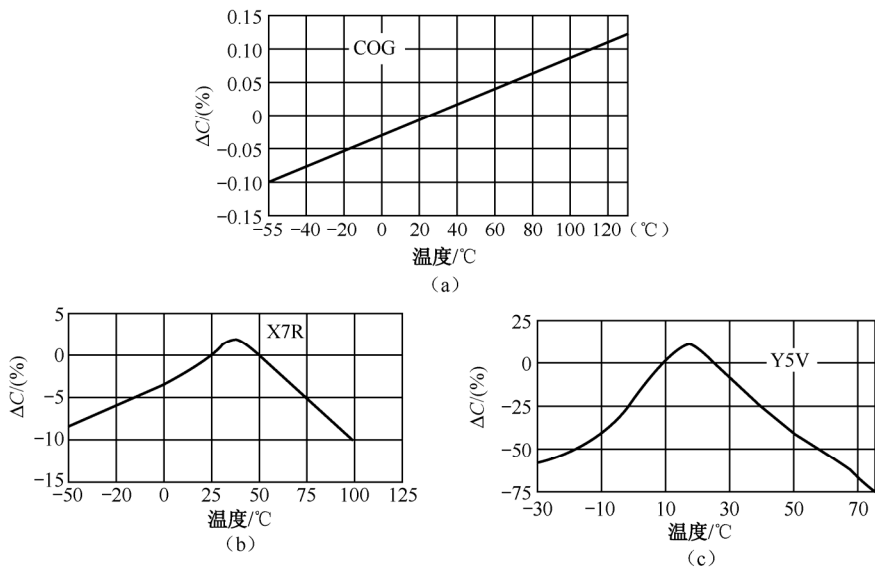


图 7-5 不同介质的电容器的温度特性

从图 7-5 中可以看出，COG 电容器的容量几乎不随温度变化，X7R 电容器的容量在额定工作温度范围变化 12% 以下，Y5V 电容器的容量在额定工作温度范围内变化 70% 以上。这些特性是必须注意的，否则会出现滤波器在高温或低温时性能变化而导致设备产生电磁兼容问题。

COG 介质虽然稳定，但介质常数较低，一般为 10~100，因此当体积较小时，容量较小。X7R 的介质常数则高得多，为 2 000~4 000，因此较小的体积能产生较大的电容，Y5V 的介质常数最高，为 5 000~25 000。

许多人在选用电容器时，片面追求电容器的体积小，这种电容器的介质虽然具有较高的介质常数，但温度稳定性很差，从而导致设备的温度特性变差。因此在选用电容器时要特别注意，尤其是在军用设备中。

4) 电压的影响

电容器的电容量不仅随着温度变化，还会随着工作电压变化，这一点在实际工程中必须注意。不同介质材料的电容器的电压特性如图 7-6 所示。从图中可以看出，X7R 电容器在额定电压状态下，其容量降为原始值的 70%，而 Y5V 电容器的容量降为原始值的 30%。了解了这个特性，在选用电容时要在电压或电容量上留出余量，否则在额定工

作电压状态下，滤波器会达不到预期的效果。

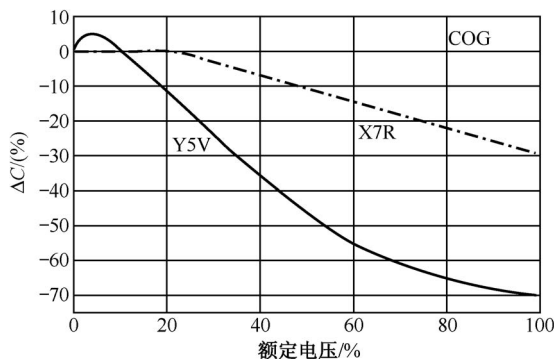


图 7-6 不同介质材料的电容器的电压特性

综合考虑温度和电压的影响时，电容的变化如图 7-7 所示。

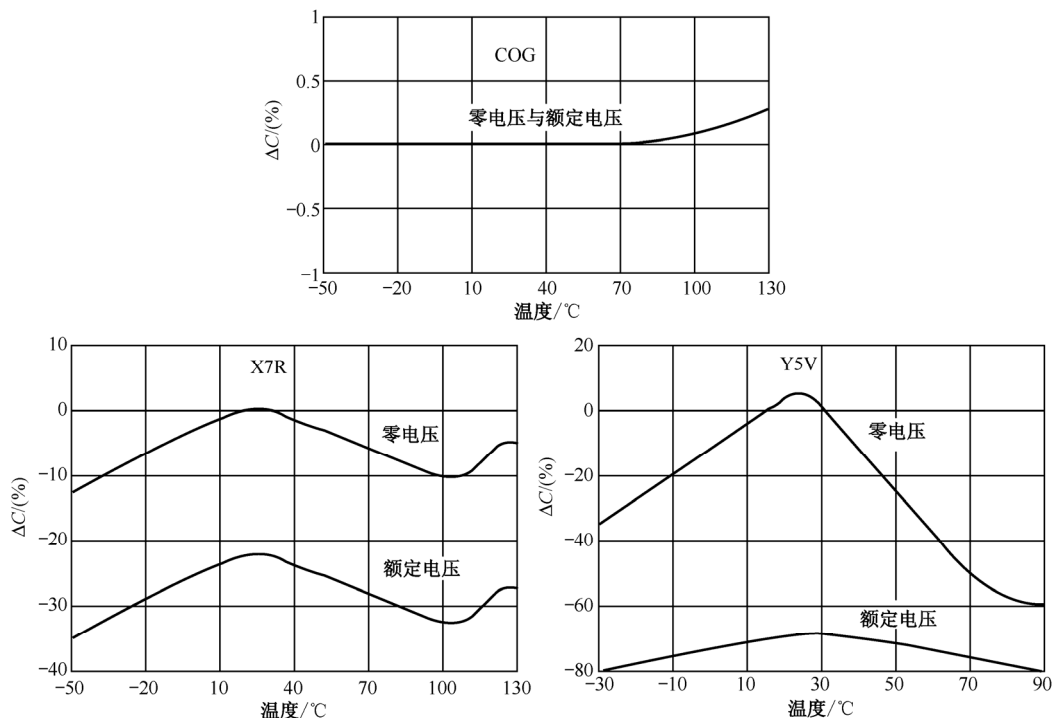


图 7-7 电容器的温度/电压特性

2. 电容器的种类及选用

1) 按介质材料分类

(1) 云母电容器 (CY)。

一般是用金属箔和云母片交叠而成的。新工艺上也有将铝或银粉喷涂在云母上，叠好，再在外面用胶木、塑料或瓷质等纯绝缘材料压紧、封固。这种电容器的优点是：容

量比较准确,漏电损耗小,温度稳定性好,绝缘电阻高,频率特性好,可用于中频、高频及要求耐压高的电路。其缺点是价格较贵,容量范围小。

(2) 纸介电容器 (CZ)。

用两条长条形铝箔和两张条形绝缘纸交替叠好,卷成圆柱形,接出引线,经过浸蜡等手续,封固而成。这种电容器的优点是:容量范围大,从几微法到几百微法都有,耐压程度一般也可满足要求,价格比较低廉。缺点是易损坏,使用年限较短。适用于频率小于 0.5 MHz 的电路。

(3) 陶瓷电容器 (CC)。

陶瓷电容由特殊陶瓷制成,分为低介电常数型 (I 型)、高介电常数型 (II 型) 和半导体型 (III 型) 3 种。I 型容量不能做得太大;温度变化时容量也跟着呈线性变化,可以做成多种多样的温度系数;容量偏差小,容量稳定;绝缘电阻极高;耐热,寿命长,体积小。II 型和 III 型介电常数高,易做成容量大、体积小的产品。II、III 型与 I 型特性基本相同,只不过它们没有温度系数呈线性和容量偏差小的特点。I 型产品主要用于对温度稳定性要求比较高的电路,如晶振、A/D 转换和 V/F 转换电路的积分电容等,还可以用做温度补偿电容。II 型和 III 型体积小,容量大,适宜作高频滤波电容。

(4) 塑料介质电容器 (CB 和 CL)。

介质用特殊塑料做成,如聚苯乙烯电容器 (CB)、涤纶电容器 (CL)。优点是耐压高、介质损耗小、绝缘电阻高、电容量比较稳定,可用于高、中频电路。缺点是怕高热。

(5) 电解电容器 (CD)。

常见的有铝电解电容器和钽电解电容器。

铝电解电容器外壳是一个金属圆筒,筒中注有电解液 (或电解糊),溶液中浸有一组铝片。当加上电压时,铝片接正极,圆筒接负极,在铝片上产生一层极薄的氧化铝薄膜,称为电容器的介质。由于正、负极接近,可以做到较大的电容量。优点:容量大,都在几微法以上。缺点:耐压不高,一般在 500 V 以下;漏电流大,易损坏,适用于做电源滤波及低频旁路。

钽电解电容器是用钽粉通过烧结,使阳极具有多孔性,从而增大电容量,具有体积小、损耗小、性能稳定等优点。常用的 CA 型钽电解电容器的电容量范围为 1~330 μF ,工作电压为 6~63 V。

与钽电解电容器相比,铝电解电容器的频率特性及温度特性差,漏电流与介质损耗大。优点是价格低。钽电解电容器在频率特性、漏电特性、温度特性方面优于铝电解电容器。低温下铝电解电容器容易失效,应选用钽电解电容器。

频率范围是选择电容器的重要依据,因为电容器的最高有效频率由其自身电容及引线电感构成的谐振频率所决定,若超过谐振频率,电容器则呈现电感性。

2) 按接入方式分类

(1) 三端电容器。

除了简单的电感型滤波器以外,任何低通滤波器都要使用旁路电容。理想的旁路电

容的衰减具有随频率的升高以每 10 倍频程 20 dB 的规律增加的特性。但是实际的电容器由于引线电感的存在,滤波器的高频性能受到限制。其阻抗在某个频率点上呈现最小,超过这个频率后阻抗开始增加。

如果将电容器的输入和输出端分开,构成三端电容器,则这种引线电感可以得到利用,如图 7-8 所示。这时,引线电感与电容一起构成了 T 型滤波器,极大改善了高频衰减特性。

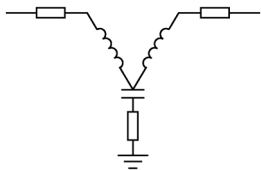


图 7-8 三端电容器

当应用在源和负载的阻抗都较低的电路中时,在上面两条引线上串两个磁珠将进一步增加引线的电感,从而增加其滤波效果。三引线结果能够将小瓷片电容频率范围从 50 MHz 拓展到 200 MHz 以上,这对于抑制 WF 频段的骚扰很有用。为了获得最好的效果,在使用时应将中间的导线(地线)直接接到低电感地上,否则这根引线上的电感将破坏电容器的滤波效果。

(2) 穿心电容器。

在实际工程中,要滤除的电磁噪声频率往往高达数百兆赫(MHz),甚至超过 1GHz。对这样高频的电磁噪声必须使用穿心电容才能有效滤除。普通电容之所以不能有效地滤除高频噪声,主要有两个方面的原因:一个是因为电容引线电感造成电容谐振,对高频信号呈现较大的阻抗,削弱了对高频信号的旁路作用;另一个是由于导线之间的寄生电容使高频信号发生耦合,降低了滤波效果,如图 7-9 所示。

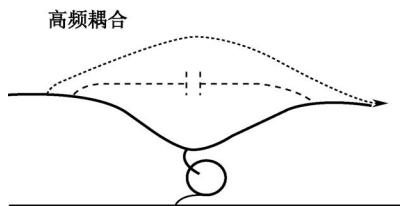


图 7-9 普通电容在高频滤波中的问题

穿心电容器之所以能有效地滤除高频噪声,是因为穿心电容器不仅没有引线电感造成电容谐振频率过低的问题,而且穿心电容器可以直接安装在金属面板上,利用金属面板起到高频隔离的作用。但是在使用穿心电容时,要注意的是安装问题。穿心电容最大的弱点是怕高温和温度冲击,这在将穿心电容往金属面板上焊接时会造成很大困难。许多电容在焊接过程中发生损坏。特别是当需要将大量的穿心电容安装在面板上时,只要有一个损坏,就很难修复,因为在将损坏的电容拆下时,会造成邻近其他电容的损坏。

随着电子设备复杂程度的提高,设备内部强弱电混合安装、数字逻辑电路混合安装

的情况越来越多,电路模块之间的相互骚扰成为严重问题。解决这种电路模块相互骚扰的方法之一是用金属隔离舱将不同性质的电路隔离开。但是所有穿过隔离舱的导线要通过穿心电容,否则会造成隔离失效。当不同电路模块之间有大量的连线时,在隔离舱上安装大量的穿心电容十分困难。为了解决这个问题,国外许多厂商开发了滤波阵列板,这是用特殊工艺事先将穿心电容焊接在一块金属板构成的器件上,使用滤波阵列板能轻而易举地解决大量导线穿过金属面板的问题。但是这种滤波阵列板的价格往往较高,每针的价格约为 30 元。

目前,国产滤波阵列板的滤波性能接近国外产品,但价格仅为国外产品的 1/10 或更低,可广泛用于电子设备的滤波隔离(如图 7-10 所示)。

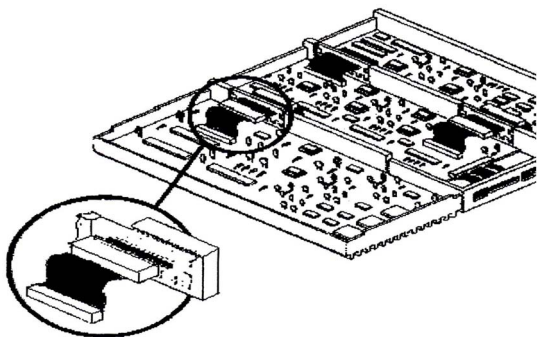


图 7-10 滤波阵列板用于电路隔离

(3) 片状电容器。

虽然片状电容器并不被认为是专门的电磁骚扰抑制器件,但由于这种电容器的引线电感几乎为零,因而是抑制电磁骚扰的理想器件。总的电感可以减小到元件本身电感,通常这只是传统电容器引线电感的 1/3~1/5。因此它们的自谐振频率可以达到同样容量的带引线电容器的 2 倍。为了避免走线的附加电感破坏这个优点,连接滤波器和去耦电容器的引线要尽量短且直。

3. 电容器使用注意事项

1) 注意电容器的耐压

每个电容器都有一定的耐压程度。使用时应保持实际电压比额定电压低 20%~30%,不要十分接近,更不要超过其额定电压值,以免由于电源电压波动而将电容器击穿,进而损坏其他元器件。

2) 注意环境温度

气温炎热和柜内通风不良都会使电容器环境温度升高。如果超过+60℃,电容器会很快老化、干枯。为了避免环境温度升高,可采用强迫通风的方法。同时在设计、安装时注意不要把大功率线绕电阻或其他发热元件放在电容器旁边。

3) 注意电解电容器的极性

电解电容器在使用时必须注意极性,不允许反接,否则将使电容器击穿,使电容短

路。同时, 电解电容器不宜使用在交流电流中, 但可用在脉冲电路中。

4) 注意电容器产生的干扰噪声

电容器使用不当也会造成噪声源。例如, 铝电解和钽电解电容器常用做电源滤波或脉冲耦合电容。在处理微小信号的电路中, 这些电容会因为漏电, 或由于其他某些原因(如温度变化)而形成新的噪声源。又如 FET 等高输入阻抗电路的旁路电容, 若容量发生变化也会产生噪声。

4. 电容器的型号及容量表示法

电容器的型号一般由四部分组成。

第一部分: 主称(用字母 C 表示)。

第二部分: 材料(用字母表示), 例如, Z——纸介; Y——云母; C——瓷介; B——聚苯乙烯; L——涤纶; D——铝(电解); A——钽(电解)。

第三部分: 分类(一般用数字表示, 个别类型用字母表示), 例如, 电容器(云母、有机) 1,2——非密封; 3,4——密封。

第四部分: 序号(用数字表示)。电容器的单位以 F、 μF 、nF 和 pF 表示。它们之间的关系是 $1\text{ F} = 103\text{ mF} = 106\text{ }\mu\text{F}$; $1\text{ }\mu\text{F} = 103\text{ nF} = 106\text{ pF}$ 。因此, $1\text{ }\mu\text{F} = 10^{-6}\text{ F}$, $1\text{ nF} = 10^{-9}\text{ F}$, $1\text{ pF} = 10^{-12}\text{ F}$ 。国际电工委员会规定电容量的表示法为: m 代表 10^{-3} , μ 代表 10^{-6} , n 代表 10^{-9} , p 代表 10^{-12} 。用量为数字表示有效数字, 再用一个字母表示数值的量级。如 $1\text{ p}2 = 1.2 \times 10^{-12} = 1.2\text{ pF}$, $220\text{ n} = 220 \times 10^{-9} = 0.22\text{ }\mu\text{F}$, $3\mu 3 = 3.3 \times 10^{-6} = 3.3\text{ }\mu\text{F}$, $2\text{m}2 = 2.2 \times 10^{-3} = 2\text{ }200 \times 10^{-6} = 2\text{ }200\text{ }\mu\text{F}$ 。

另一种表示方法是用 3 位有效数字表示电容量, 最后用一个字母表示误差。3 位数字中的前两位表示有效值, 第三位表示 10^n 的 n 值, $n = 1 \sim 8$, 特殊情况 $n = 9$ 时, 不表示 10^9 , 而表示为 10^{-1} 。

例如, “102”表示 $10 \times 10^2 = 1\text{ }000\text{ pF}$ 。

“103”表示 $10 \times 10^3 = 10\text{ }000\text{ pF} = 0.01\text{ }\mu\text{F}$ 。

“223”表示 $22 \times 10^3 = 22\text{ }000\text{ pF} = 0.022\text{ }\mu\text{F}$ 。

“474”表示 $47 \times 10^4 = 470\text{ }000\text{ pF} = 0.471\text{ }\mu\text{F}$ 。

“159”表示 $15 \times 10^{-1}\text{ pF} = 1.5\text{ pF}$ 。

有效数字后面的字母表示误差值, 由于制造电容的材料不同, 误差范围也不同, 有的误差很大。

7.2.2 电感

1. 实际电感特性

一段导线就构成了一个电感。要获得较大的电感量, 需要将导线绕成线圈。线圈的芯材可以有两种, 一种是非磁性的(空气), 另一种是磁性的。磁性磁芯又分为闭合磁路的和开放磁路的磁性磁芯。

电感的非理想性: 实际的电感器除了电感参数以外, 还有寄生电阻和电容。其中寄

生电容的影响更大。理想电感的阻抗随着频率的升高成正比增加，这正是电感对高频干扰信号衰减较大的根本原因。但是，由于匝间寄生电容的存在，实际的电感器等效电路是一个 LC 并网络。当角频率为 $1/\sqrt{LC}$ 时，会发生并联谐振，这时电感的阻抗最大，超过谐振点后，电感器的阻抗呈现电容阻抗特性——随频率增加而降低。电感的电感量越大，往往寄生电容也越大，电感的谐振频率越低，实际电感的等效电路如图 7-11 所示，频率特性如图 7-12 所示。

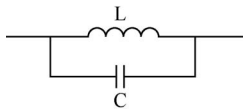


图 7-11 实际电感的等效电路

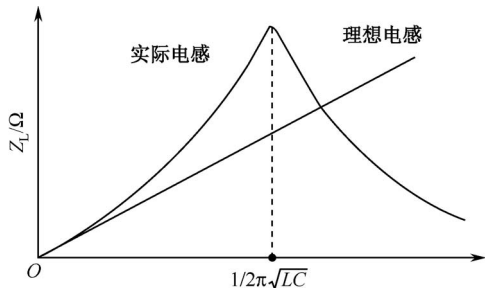


图 7-12 实际电感的频率特性

说明 1：实际电感在谐振频率以下比在理想电感的阻抗更高，在谐振点达到最大。利用这个特性，可以通过调整电感的电感量和绕制方法使电感在特定的频率上谐振，从而抑制特定频率的干扰。

说明 2：开放磁芯会产生磁漏，因此会在电感周围产生较强的磁场，对周围的电路产生干扰。为了避免这个问题，尽量使用闭合磁芯。

说明 3：与漏磁现象相反的是开放磁芯电感对外界的磁场也十分敏感（收音机内的磁性天线就是一个利用这个特性的例子），因此，要注意电感拾取外界噪声而增加电路敏感度的问题。

为了防止上述电感本身的电磁兼容问题，往往将电感屏蔽起来。频率较高时，可以采用铜或铝等导电性良好的材料；频率低时，要使用高磁导率的材料。

电感线圈电感量的估算：绕制线圈时，怎样估算线圈的电感量呢？如果能够得到磁芯的详细技术参数，当然可以利用公式计算电感量。但是大多数场合，手头只有一个现成的磁芯，想用这个磁芯制作一个电感。这时，可以先在这个磁芯上绕 9 匝，再用电感表测量其电感量，设读数为 L_0 ，如果需要的电感量为 L ，则应该绕制的匝数 N 为

$$N = 3(L / L_0)^{1/2} \tag{7.2.1}$$

2. 克服电感寄生电容的方法

要拓宽电感的工作频率范围，最关键的是减小寄生电容。电感的寄生电容与匝数、磁芯材料（介电常数）、线圈的绕法等因素有关。用下面的方法可以减小寄生电容。

- (1) 尽量单层绕制：空间允许时，尽量使线圈为单层，并且输入与输出端远离。
- (2) 多层绕制的方法：线圈的匝数较多，必须多层绕制时，要向一个方向绕，边绕边重叠，不要绕完一层后，再往回绕。

(3) 分段绕制：在一个磁芯上将线圈分段绕制，这样每段的电容较小，并且总的寄生电容是两段上的寄生电容的串联，总容量比每段的寄生容量小。

(4) 多个电感串联起来：对于要求较高的滤波器，可以将一个大电感分解成一个较大的电感和若干电感量不同的小电感，将这些电感串联起来，可以使电感的带宽扩展。但这付出的代价是体积增大和成本升高。另外，电感串联会引起与电容并联同样的问题，即引入了额外的串联谐振点。谐振点上电感的阻抗很小。

3. 共模扼流线圈

当电感中流过较大电流时，电感会发生饱和，导致电感量下降。共模扼流线圈可以避免这种情况的发生。

(1) 共模扼流线圈的结构：将传输电流的两根导线（如直流供电的电源线和地线，交流供电的火线和零线）按照图 7-13 所示的方法绕制。这时，两根导线中的电流在磁芯中产生的磁力线方向相反，并且强度相同，刚好抵消，所以磁芯中总的磁感应强度为 0，因此磁芯不会饱和。而对于两根导线上方向相同的共模干扰电流，则没有抵消的效果，会呈现较大的电感。由于这种电感只对共模干扰电流有抑制作用，而对差模电流没有影响，因此叫做共模扼流线圈。

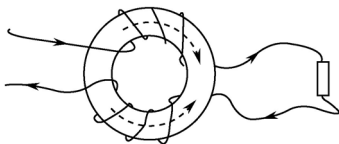


图 7-13 共模扼流线圈的构造

(2) 制作方法：电流的去线和回线要满足流过它们的电流在磁芯中产生的磁力线抵消的条件。对于没有很高绝缘要求的信号线，可以采用双线并绕的方法构成共模扼流线圈，但对于交流电源线，考虑到两根导线之间必须承受较高的电压，必须分开绕制。

(3) 共模扼流线圈寄生差模电感：理想的共模扼流线圈上的两根导线产生的磁通完全抵消，磁芯永远不会饱和，并且对差模电流没有任何影响。但实际的共模扼流线圈的两组线圈产生的磁力线不会全集中在磁芯中，而会有一定的漏磁，这部分漏磁不会抵消，因此还是有一定的差模电感。

(4) 寄生差模电感的好处：由于寄生差模电感的存在，共模扼流线圈可以对差模干扰有一定的抑制作用。在设计滤波器时，可以将这种因素考虑进来。

(5) 寄生差模电感的危害：会导致电感磁芯饱和。而且从磁芯中泄露出来的差模磁场会形成新的辐射干扰源。

(6) 影响寄生差模电感的因素：与线圈的绕制方法和线圈周围物体的磁导率等有关。例如，将共模扼流线圈放进钢制小盒中，会增加差模电感。

(7) 差模电感的测量方法：将共模扼流线圈一端的两根导线短接，在另一端上测量线圈的电感。

7.2.3 滤波连接器

令许多产品开发人员不解的事情是：为什么两台独立进行电磁干扰测试时完全合格的设备通过电缆连接起来后，系统就不再合格了。这是因为忽略了电缆的辐射作用。实践表明，按照屏蔽设计规范设计的屏蔽机箱一般很容易达到 60~80 dB 的屏蔽效能，但往往由于电缆处置不当，造成系统产生严重的电磁兼容问题。90% 的电磁兼容问题是由于电缆造成的。这是因为电缆是高效的电磁波接收天线和辐射天线。

电缆产生的辐射尤其严重。电缆之所以会辐射电磁波，是因为电缆端口处有共模电压存在，电缆在这个共模电压的驱动下，如同一根单极天线，如图 7-14 所示。

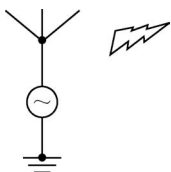


图 7-14 电缆共模辐射模型

它产生的电场辐射如式 (7.2.2) 所示：

$$E = 12.6 \times 10^{-7} (fIL)(1/r) \quad (7.2.2)$$

式中， I ——电缆中的共模电流强度； L ——电缆长度； f ——共模信号的频率； r ——观测点到辐射源的距离。要减小电缆的辐射，可以减小高频共模电流强度，缩短电缆长度。电缆的长度往往不能随意减小，抑制电缆共模辐射的最好方法是减小高频共模电流的幅度，因为高频共模电流的辐射效率很高，是造成电缆超标辐射的主要因素。

减小电缆上共模高频电流的一个有效方法是在电缆的端口处使用低通滤波器，滤除电缆上的高频共模电流。传统上都是将滤波器安装在线路板上的电缆端口处，如图 7-15 所示。

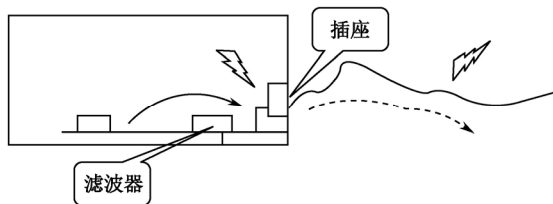


图 7-15 线路板上的共模低通滤波器

滤波器的这种安装方式有一个问题，就是经过滤波后的信号线在机箱内较长，容易再次感应干扰信号，形成新的共模电流，导致电缆辐射。再次感应的信号有两个来源，一个是机箱内的电磁波会感应到电缆上；另一个是滤波器前的干扰信号会通过寄生电容直接耦合到电缆端口上。解决这个问题的方法是尽量减小滤波后暴露在机箱内的导线长度。

滤波连接器是解决这个问题的理想器件。滤波连接器的每个插针上有一个低通滤波器，能够将插针上的共模电流滤掉。这些滤波连接器往往在外形和尺寸上与普通连接器相同，可以直接替代普通连接器。由于连接器安装在电缆进入机箱的端口处，因此滤波后的导线不会再感应干扰信号，如图 7-16 所示。

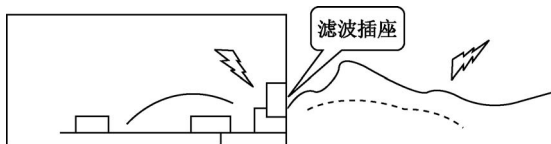


图 7-16 滤波连接器能够防止滤波后的导线不会再感应干扰信号

1. 滤波连接器的优点

当然，使用屏蔽电缆也能解决电缆辐射问题。但使用滤波连接器的方案在许多方面要优于屏蔽电缆，下面列举一些滤波连接器的优点。

(1) 滤波连接器能够将电缆中的干扰电流滤除，从而彻底消除电缆的辐射因素。而屏蔽电缆仅仅是防止干扰通过电缆辐射，实际上这些干扰电流还在电缆中。因此当主机通过屏蔽电缆与打印机连接时，干扰电流会流入打印机，通过打印机的天线效应去辐射。

(2) 滤波连接器抑制电缆辐射的效果比屏蔽电缆更稳定。屏蔽电缆的效果在很大程度上取决于电缆的端接。由于电缆频繁地拆装或搭接点因时间过长形成的氧化，因而端接阻抗会增加，造成屏蔽效能下降。

(3) 使用滤波连接器后，可以降低对电缆端接的要求，避免使用价格昂贵的高质量屏蔽电缆，从而降低成本。

滤波连接器中的滤波电路有较简单的单电容型或单电感型电路，也有较复杂的 Π 型、L 型或 T 型电路。

2. 使用滤波连接器的注意事项

1) 滤波器的接地

滤波连接器必须良好接地才能起到预期的滤波作用。对于直接安装在面板上的滤波连接器，似乎只要保证机箱与滤波连接器之间是导电接触就不会有问题，但是在要求较严格的场合（如要满足军标的干扰发射限制要求），还是需要足够的重视。因为在许多场合滤波连接器与机箱之间的接触并不是十分充分的，而仅在一些点接触，这样高频的接触阻抗比较大。为了避免这一点，往往需要在滤波连接器与机箱面板之间安装电磁密封衬垫。

另外，对于含有旁路电容的滤波连接器（大部分都含有），由于信号线中的大部分干扰被旁路到地上，因此在滤波器与地的接触点上会有较大的干扰电流流过。如果滤波器与地的接触阻抗较大，会在这个阻抗上产生较大的电压降，导致较强的辐射。

如果滤波连接器安装在线路板上，并且通过线路板上的地线与机箱相连，则主要是为滤波器提供一个干净的滤波地，这个地与线路板上的信号地分开，仅通过一点连接，并且要与机箱保持良好的搭接。

2) 所有针都要滤波

有些厂商可以根据用户的要求提供特殊的滤波连接器, 这些连接器的某些插针上没有滤波器。用户之所以要求某些芯上不装滤波器, 大致有两种情况, 一种是连接器中的某些芯传输的信号频率很高, 轻微的滤波也会造成信号失真, 因此只好不对这些芯进行滤波。另一种情况是有些用户为了降低成本, 要求厂商仅在传输信号的芯上安装滤波器。

在使用这种滤波器时, 要注意它的滤波效果可能很差。因为机箱中的干扰信号会耦合到电缆中的所有导线上, 这样电缆中没有经过滤波的芯线会将感应的信号带出机箱, 产生共模辐射。另外, 当频率较高时, 电缆中导线之间的耦合也非常严重, 这样没有经过滤波的导线上的电流会耦合到经过滤波的导线上, 造成严重的辐射。

所以滤波连接器中的芯都需要滤波。实际上如果为了降低成本在某些芯线上不安装滤波器是没有必要的, 因为现在流行的制造工艺是将电容阵列板安装在连接器中, 这种工艺并不会因为少几个电容而降低成本。如果有些信号由于频率较高而不允许滤波, 则在设计时可以考虑将这些信号连接到单独的连接器的上, 然后对这些信号线使用屏蔽性能较好的屏蔽电缆。

3) 屏蔽机箱

我们已经描述了滤波连接器的好处。但要注意, 获得这些好处的前提条件是滤波连接器的输入端与输出端是被隔离开的。因此如果机箱本身不是屏蔽的, 则滤波连接器就失去了这些好处。所以只有在屏蔽机箱上才有必要使用滤波连接器。

3. 试验结果

我们在计算机上分别使用普通连接器和滤波连接器进行辐射发射研究。从这些结果中可以看出, 当使用屏蔽机箱时, 主要的辐射源是电缆。这时使用滤波连接器可以使辐射发射降低 10~30 dB。

图 7-17 所示是测试环境的背景, 以这个作为参考。图 7-18 所示是计算机通过普通连接器连接上打印电缆时的宽带发射。

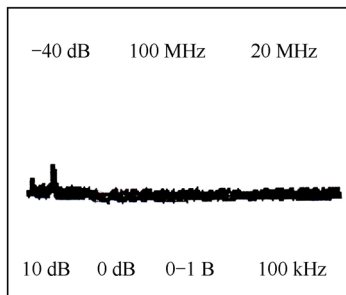


图 7-17 测试环境的背景

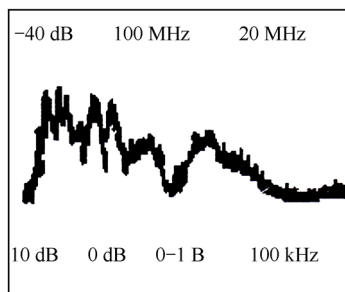


图 7-18 主机通过普通连接器连接打印电缆

图 7-19 所示是使用了滤波连接器后的辐射情况, 可以看出, 辐射已经明显减小。如果将电缆拔下, 辐射的情况与图 7-19 基本相同。因此, 可以认为电缆产生的辐射已

经基本消除。剩余的辐射是其他原因造成的,比如电源线的辐射。要消除这些剩余的干扰,需要更换一个性能更好的电源线滤波器。

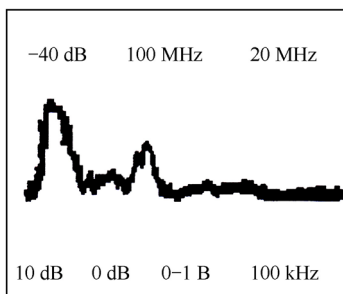


图 7-19 使用了滤波连接器后的辐射情况

4. 滤波连接器的选用

1) 滤波连接器的类型

滤波连接器可分为以下几种类型。

(1) 经济型与普通型 D 型滤波器连接器。

适用于电磁兼容要求较低的产品,如一般民用电子产品。

(2) 高性能型与高密度 D 型滤波器连接器。

适用于对电磁兼容要求较高的产品,如欲销往欧洲的民用产品、工业控制设备和军用设备等。高密度 D 型滤波器连接器适用于个人计算机、工业过程设备、图形工作站、蜂窝式移动通信系统和医学电子设备。

(3) 超高性能 D 型滤波器连接器。

由于采用 Π 型滤波器而具有理想的抑制效果。它既能将高频干扰有效地滤除,又能保证信号波形不变。适用于高速脉冲信号系统或对电磁兼容要求特别高的场合,如需要满足军用标准和 TEMPEST 标准的设备等。

(4) 军用滤波器连接器。

专为军用设备生产的连接器。

2) 滤波器的截止频率

选用滤波连接器时,除了在选用普通连接器时要考虑的因素外,滤波器的截止频率也是一个重要的参数。当连接器中各芯线上传输的信号频率不同时,要以频率最高的信号为基准来确定截止频率。虽然许多厂商可以按照用户的要求在不同的芯上安装不同截止频率的滤波器,但这往往是行不通的。因为只要有一根信号线上有频率较高的共模电流,它就会耦合到连接同一个连接器的其他导线上,造成辐射。一般滤波连接器厂商给用户的参数是滤波连接器中的电容值,为了知道不同电容值对应的截止频率,往往还提供一张电容与截止频率的对照表。

为了保证滤波器连接器能够良好地接地,在连接器与屏蔽机箱间还应使用射频密封衬垫。

➔ 7.3 电磁干扰滤波器的选用与安装

7.3.1 电磁干扰滤波器的选用

滤波器的选择看似神秘，但实质上并非如此。不过在很大场合，即使竭尽全力采取下述方法来选择，也还是需要实验多个滤波器后才能挑出最合适的一只。

那么，为什么要煞费苦心去正确地选择滤波器呢？按这里提供的准则来进行滤波器的筛选，至少可满足滤波器的正确尺寸和类型的要求，因此，试用滤波器仅仅是用一只滤波器替换另一只滤波器，同时检查传导及辐射发射，看哪只滤波器具有最佳的性价比。

如果在设计过程中没有足够的耐心去选择滤波器，墨菲法则表明：最终证明是最合适的滤波器会与产品的其他要求完全不兼容。要么滤波器太大或太重而不能安装在铸塑模机壳内，需要一笔昂贵的重新制作模具的费用，要么需要一种不易实现的安装方法，要么由于滤波器的泄漏电流，将使推向市场的产品存在安全隐患问题。确实，如果没有仔细选择正确型号及类型的滤波器，那么按照墨菲法则，挑选合适的滤波器将增加研发和生产费用，同时也会推迟产品的上市时间。

1. 滤波器相关参数

通过将产品的发射频谱与相关的电磁兼容标准比较，可以估算用滤波器控制发射所需要的衰减量。对于抗扰性控制，可以通过比较外部电噪声（通常取自有关的电磁兼容抗扰度标准）与产品电子线路的敏感性，以及干扰期间希望达到的性能等级来估算一个粗略值。

当明确知道一个产品实际的发射或敏感性能时，就可采取精确的计算而不去进行估测。不过，如果不是在一个可控的 $50\ \Omega$ 阻抗环境中工作，在购买滤波器时，厂家提供的产品指标是靠不住的。

滤波器的工作原理是在射频电磁波的传输路径上形成很大的特性阻抗不连续性，将射频电磁波中的大部分能力反射回源处。大多数滤波器的性能是在源和负载阻抗均为 $50\ \Omega$ 的条件下测得的，这使我们直接联想到极为重要的一点，这就是滤波器的性能在实际情况下不可能达到最佳。

考察一个典型的电源线滤波器，它安装在交流电源线与作为电子产品直流电源的交一直流变换器之间。白天，交流电源的阻抗在 $2\ \Omega \sim 2\ \text{k}\Omega$ 之间变化，取决于与它连接的负载及所关心的频率。连接到电子设备的电源线的特征阻抗大约在 $150\ \Omega$ ，当整流器在电源波形的尖峰附近导通时相当于短路，而在其他时间相当于开路。

滤波器参数是在 $50\ \Omega$ 的源和负载阻抗的测试环境下获得的，因为大多数射频测试设备采用 $50\ \Omega$ 的源、负载及电缆。这种方法获得的滤波器性能参数是最优化的，同时也是最具有误导性的。在实际应用中，常用 50/50 来表示在源和负载均为 $50\ \Omega$ 时测得的滤波器的性能参数。

因为滤波器是由电感和电容组成的,因此这是一个谐振电路。其性能和谐振主要取决于源端及负载端的阻抗。事实上,一只价格昂贵且 50/50 性能优秀的滤波器可能在实际中的性能还不如一只价格较低且 50/50 性能较差的滤波器好。

2. 电源线滤波器的选用

图 7-20 给出的单级电源线滤波器对源和负载的阻抗都很敏感,当工作在实际的源和负载阻抗条件下时,很容易产生增益,而不是衰减。这种增益通常出现在 150 kHz~10 MHz 的频率范围内,幅度可以达到 10~20 dB。因此,在产品上安装一个不合适的滤波器后,可能会增加发射强度和/或使敏感性变得更糟。

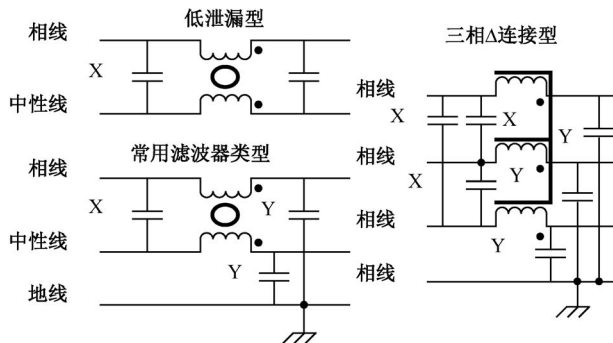


图 7-20 典型的单级电源线滤波器

如图 7-21 所示的两级或更多级的滤波器,可以使内部接点保持在相对稳定的阻抗上,因此对负载及源的阻抗依赖不是很大,可以提供接近 50/50 指标的性能。当然,这些滤波器体积更大,价格更高。

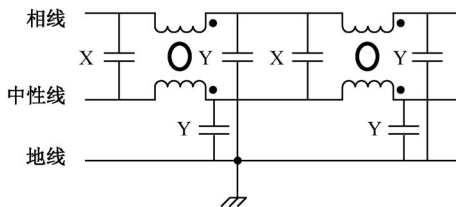


图 7-21 典型的两级电源线滤波器

为了解决阻抗问题,最好是购买生产厂家同时标明了在“匹配”的 50/50 测试系统中的指标和在“失配”条件下的指标的产品。失配的数据是在源阻抗为 $0.1\ \Omega$, 负载阻抗为 $100\ \Omega$, 源阻抗为 $100\ \Omega$ 及负载阻抗为 $0.1\ \Omega$ 的条件下测得的。一个窍门是用所有这些曲线中的最坏情况形成一条衰减曲线图,并将其作为滤波器的技术指标。

大多数电源线滤波器采用共模扼流圈和连接在相线间的 X 电容处理差模干扰。如果滤波器用于解决开关电源、相位角功率控制器、马达驱动器等电路产生的低频高强度干扰问题,则通常需要比 X 电容所能提供的差模衰减更大的衰减,这时需要采用如图 7-22 所示的差模扼流圈。由于磁芯会发生饱和现象,所以很难以较小的体积获得较大的电感量。这些滤波器一般体积比较大而且也比较昂贵。

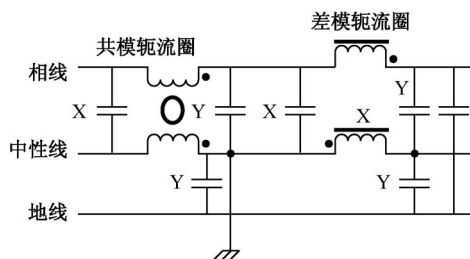


图 7-22 开关电源转换器上使用的典型滤波器

大多数电源线滤波器采用 Y 型电容，这些电容连接在相线与地线之间。为了不超过相关安全标准限定的地线允许泄漏值，这些电容的值大约在几纳法（或几千皮法）左右。一般来说，Y 电容应连接到噪声干扰较大的导线上（例如，仪表灵敏模拟电路中的电源线，开关电源中的整流器等）。

对于医疗设备，特别是与病人身体接触的，要求地线泄漏电流值相当低，因此使用任意一种 Y 型电容都不行。这时采用的滤波器需要更大的电感和/或采用多级级联，因此体积较大，价格较高。

在较大的系统里，来自大量 Y 型小电容的地线泄漏会产生很大的地线电流，这样就会产生地线电压差，从而导致不同设备间的互连电缆上产生“嗡嗡”的交流声和瞬态高电平。现代最佳解决方案是采用等势三维地线搭接，但许多陈旧的设施中不能实现这一点。因此，决定用在大系统里的设备应使用 Y 电容很小或根本没有 Y 电容的滤波器。

最好是使用满足安全认证的电源线滤波器。这些滤波器的安全性、可靠性、温度范围、额定电压和电流及恰当的安全标准的应用均已由厂家认证通过。

3. 信号线滤波器的选用

如果传导发射或辐射发射由不可避免的信号频谱引起，那么试图使用差模滤波器来减小这些发射并不是办法。不过对所关心的信号频谱范围内的频率，采用共模滤波是可行的，因为有用的信号是差模而非共模。

在信号线滤波器的技术指标中，一般都忽略了地线噪声。驱动芯片会产生地线跳跃噪声，如果数字印制电路板的地线面与机壳间的射频搭接不好，便会在所有导线中产生大量的数字噪声，因此，外封装上标有低转换速率的驱动芯片仍可能产生高电平的射频噪声。

低频模拟信号中使用的滤波器，尤其是当电子电路的灵敏度非常高时，需要采用如电源线滤波器一样的单级或多级电路。然而，在大多数情况下，信号是数字化的或高电平模拟信号，对干扰不很敏感，因此可采用 R、L、C、RC、LC、T 或 Π 型滤波器，如图 7-23 所示。

R 和 L 滤波器的基本工作原理是产生一个高阻抗以反射干扰，但这通常仅能获得几分贝（dB）的衰减。当源和负载阻抗都较低时，这种滤波器最适合。L 滤波器能产生谐振，因此最好由软铁氧化磁性材料做成。由于电阻中存在 0.2 pF 左右的寄生旁路电容，因此 R 滤波器在高频时会失去滤波效能。

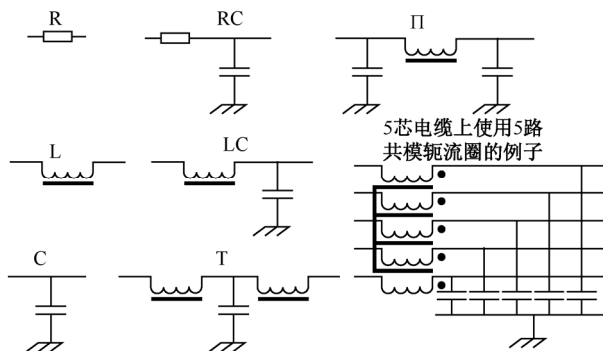


图 7-23 各种信号线滤波器

C 滤波器能产生一个低阻抗来反射干扰，通常用在源和负载阻抗都比较高的场合。通常，C 滤波器的性能曲线看起来都是比较理想的，但实际上远不是这样。

具有较大 (R) 电阻值的 RC 滤波器比较理想，因为它不会产生明显的谐振。但当信号频率在几千赫兹以上，或传输率在 kB/s 以上的电路中，高 (R) 电阻值是不适合的，最好是取 $10\text{ k}\Omega$ 左右。

LC、T 和 Π 型滤波器可以有更高的衰减值，但当它们连接到非 $50\ \Omega$ 的源和负载阻抗的环境中时会发生谐振现象。这个问题可以通过在电感上装入铁氧体来解决。铁氧体在低频（有时可达 10 MHz 左右）时呈电感特性，但在较高的频率处，它们失去了电感特性而表现出电阻特性。铁氧体磁珠在 100 MHz 时的有效阻抗超过 $1\text{ k}\Omega$ ，但直流时的阻抗则小于 $0.5\ \Omega$ ，因而在无用频率处呈现高阻状态，在有用频率处呈现低阻状态。现在可以采购到型号众多的 SMD 铁氧体磁珠来满足各种频率的需要。

射频滤波器的一个鲜为人知的特性就是当它不连接到良好的射频参考地时，其效果是很差的。唯一能够作为射频参考地的是 PCB 上的实心地平面、金属板或金属壳体（“法拉第笼”），在理想情况下，在被滤波的最高频率处，它们都不应有大于波长 $1/100$ 的孔洞（空气中 1 GHz 时 3 mm ，或者在 FR4 纤维玻璃板中为 1.5 mm ）。

滤波器中的电容与射频地之间的连线也应小于波长的 $1/100$ ，同时还要保证电感值很低。这就是说，除非在极低的频率下，否则安全地的绿/黄色导线不能作为滤波器地线。例如，如果装有 2.2 nF 的 Y 型电容的电源线滤波器通过一根 10 cm 长的绿/黄色导线接地，那么在 20 MHz 以上的频率时，由于地线电感的影响，其 Y 型电容将失效。

在估计绿/黄色导线地线的搭接性能时，可以假设导线的电感值约为 1 nH/mm 。滤波器唯一正确的连接是将滤波器壳壁直接与射频地参考面或壳体连接起来。当然，只要有直接的射频地线搭接，那么出于安全考虑，装入绿/黄色导线也未尝不可。

如果滤波器要安装在 PCB 上，其电容必须直接连接到地平面上。如果没有地平面，安装含有电容的滤波器是劳而无功的。如果滤波器安装在一个金属板或屏蔽壳体上，那么它必须是导线连接的，有时甚至有必要在滤波器安装面贴上一圈导电垫圈，以使滤波器壳体与其搭接的金属面间形成无缝隙的射频搭接。

军用信号滤波器一般属于 C 型和 Π 型，因为大多数常见的军事设备都有一个很结

实的、设计完善的射频地（金属浇注机箱）。因此，这种场合使用的滤波器一般不会受到射频地不良所带来的影响。

不过，对民用品、商业用品及工业制品来说，射频地的完整性通常是一个严重的问题，因为需要处处考虑产品成本。因此，在这种情况下，性能较好的信号线滤波器一般是 RC、LC 或 T 型的，将电阻或电感连接到外部导线上。将使射频参考地线上的射频电流比 C 型或 Π 型产生的射频电流小得多。

如果一条电缆有多束芯线，通常最好的办法是将所有的芯线穿过一个共模扼流圈。如果减小敏感信号之间的串扰十分重要，则可以对芯线中各个信号分别采用共模扼流圈。图 7-23 中的最后一个滤波器是用于五芯电缆的五路共模扼流圈的一个例子。在差不多 5 mm 的正方体壳体内可装贴 8 路共模扼流圈。

如果电源线滤波器不允许来自数字电路的 900 MHz 的谐波泄漏到电源线中，这时就应考虑滤波器和屏蔽体的优化配合。这些接近微波频率的谐波会使产品的辐射发射加强。

射频滤波器的另一个鲜为人知的特性就是要将滤波器与屏蔽视为一个整体，两者相辅相成。错误的滤波器结构设计或安装方法很容易使产品辐射超标。

7.3.2 电磁干扰滤波器的安装

应该选择合适的滤波器，如果安装不当，仍然会破坏滤波器的衰减特性。只有恰当地安装滤波器才能获得良好的效果，通常应注意以下事项：

① 滤波器最好安装在干扰源出口处，再将干扰源和滤波器完全屏蔽在一个盒子里。若干扰内腔空间有限，则应安装在靠近干扰源电源线出口外侧，滤波器壳体与干扰源壳体应进行良好的搭接。

② 滤波器的输入和输出线必须分开，以免出现输入端与输出端线路耦合现象而降低滤波器的衰减特性。通常利用隔板或底盘来固定滤波器。若不能实施隔离措施，则采用屏蔽引线比较可靠。

③ 滤波器中电容器导线应尽可能短，防止感抗与容抗在某个频率上形成谐振，电容器相对于其他电容器和元件成直角安装，避免相互影响。

④ 滤波器接地线上有很大的短路电流，能辐射很强的电磁干扰，因此对滤波器的抑制元件要进行良好的屏蔽。

⑤ 焊接在同一插座上的每根导线都必须进行滤波，否则会使滤波器的衰减特性完全失去。

⑥ 套管滤波器必须完全同轴安装，使电磁干扰电流成辐射状流经电容器。若把套管电容器通过法兰盘直接安装在干扰源上与设备组成一体，接地电流就会成辐射状流过，抑制频率范围可扩展到几吉赫（GHz）。推荐的滤波器安装方法如图 7-24 所示。如果安装方法不当，抑制效果就会明显恶化，如图 7-25 和图 7-26 所示。电源线滤波器的正确安装如图 7-27 所示。

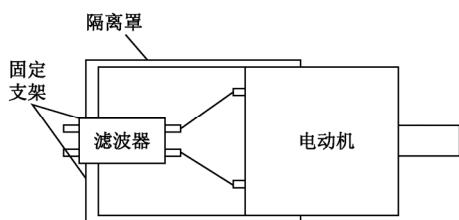


图 7-24 推荐的滤波器安装方法

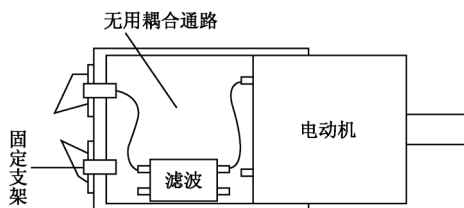
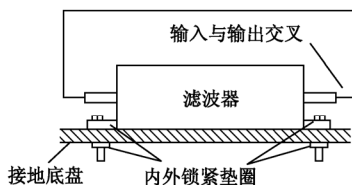
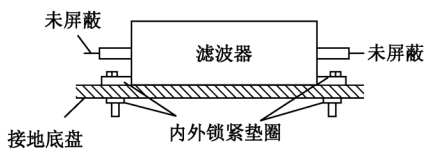


图 7-25 不宜采用的滤波器安装方法

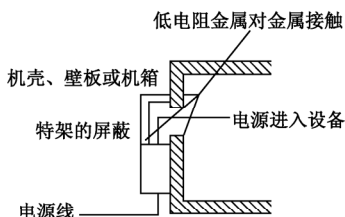


(a) 交叉的输入与输出引线

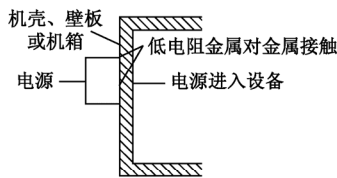


(b) 未屏蔽引线

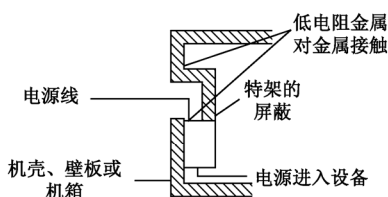
图 7-26 不正确的滤波器安装方法



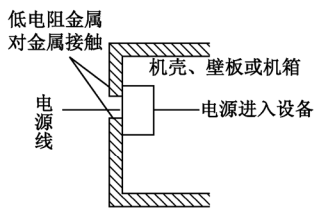
(a) 安装方法一



(b) 安装方法二



(c) 安装方法三



(d) 安装方法四

图 7-27 电源线滤波器的正确安装

习题七

- 7.1 阐述电磁干扰滤波器的工作原理。
- 7.2 试给出实际电容器的等效电路和频率特性图，并分析其在实际应用中对滤波特性的影响。
- 7.3 试给出实际电感的等效电路和频率特性图，并分析其在实际应用中对滤波特性的影响。
- 7.4 试列出克服电感寄生电容的方法。
- 7.5 试列举滤波器安装的注意事项。

第 8 章

PCB 的电磁兼容设计及应用

目前,用于各类电子设备和系统的电子器材仍然以印制电路板(PCB)为主要装配方式。实践证明,即使电路原理图设计正确,而印制电路板设计不当,也会使载有小功率、高精度、快速逻辑或连接到高阻抗终端的一些导线受到寄生阻抗或介质吸收的影响,致使印制电路板发生电磁兼容性问题。例如,如果印制电路板中的两条细平行线靠得很近,则会形成信号波形的延迟,在传输线的终端形成反射噪声。因此,在设计印制电路板时,应注意采用正确的方法。本章首先介绍了 PCB 的一般设计原则,然后讲述 PCB 中的旁路和去耦设计,最后阐述了变频器应用中的电磁兼容应用。

➔ 8.1 一般设计原则

PCB 是电子产品中电路元件和器件的支撑件。它提供电路元件与器件之间的电气连接。随着电子技术的飞速发展,PCB 的密度越来越高。PCB 设计的好坏对抗干扰能力影响很大。因此,在进行 PCB 设计时,必须遵守 PCB 设计的一般原则,并应符合抗干扰设计的要求。

8.1.1 印制电路板的布局和布线

在 PCB 设计中,布局是一个重要的环节。布局结果的好坏将直接影响布线的结果,因此,合理的布局是 PCB 设计成功的第一步。首先,要考虑 PCB 尺寸大小。PCB 尺寸过大时,印制线条长,阻抗增加,抗噪声能力下降,成本也增加;尺寸过小,则散热不好,且邻近线条易受干扰。确定 PCB 尺寸后,再确定特殊元件的位置。最后,根据电路的功能单元,对电路的全部元器件进行布局。

在确定特殊元件的位置时要遵守以下原则:

- ① 尽可能缩短高频元器件之间的连线,设法减小它们的分布参数和相互间的电磁干扰。易受干扰的元器件不能相互挨得太近,输入和输出元件应尽量远离。
- ② 某些元器件或导线之间可能有较高的电位差,应加大它们之间的距离,以免放电引起意外短路。带高压的元器件应尽量布置在调试时手不易触及的地方。
- ③ 质量超过 15 g 的元器件,应当用支架加以固定,然后焊接。那些又大又重、发

热量多的元器件,不宜装在印制电路板上,而应装在整机的机箱底板上,并应考虑散热问题。热敏元件应远离发热元件。

④ 对于电位器、可调电感线圈、可变电容器和微动开关等可调元件的布局应考虑整机的结构要求。若是机内调节,则应放在印制电路板上方便进行调节的地方;若是机外调节,则其位置要与调节旋钮在机箱面板上的位置相适应。

⑤ 应留出印制电路板定位孔及固定支架所占有的位置。

根据电路的功能单元对电路的全部元器件进行布局,要符合以下原则:

① 按照电路的流程安排各个功能电路单元的位置,使布局便于信号疏通,并使信号尽量保持一致的方向。

② 以每个功能电路的核心元件为中心来进行布局。元器件应均匀、整齐、紧凑地排列在 PCB 上,尽量减少和缩短各元器件之间的引线和连接。

③ 在高频下工作的电路,要考虑元器件之间的分布参数。一般电路应尽量使元器件平行排列。这样,不但美观,而且装焊容易,易于批量生产。

④ 位于电路板边沿的元器件,离电路板边沿一般不小于 2 mm。电路板的最佳形状为矩形,长宽比为 3:2 或 4:3。电路板面尺寸大于 200 mm×150 mm 时,应考虑电路板所受的机械强度。

在印制电路板布线时,应先确定元器件在板上的位置,然后布置地线、电源线,再安排高速信号线,最后考虑低速信号线。

元器件的位置应按电源电压、数字/模拟电路、速度快慢和电流大小等进行分组,以免相互干扰。根据元器件的位置可以确定印制电路板连接器各个引脚的安排。所有连接器应安排在印制电路板的一侧,尽量避免从两侧引出电缆,减少共模辐射。

(1) 电源线。

在考虑安全条件下,电源线应尽量靠近地线,如图 8-1 (a) 所示,以减小差模辐射的环面积,也有助于减小电路的交扰;而图 8-1 (b) 所示的环面积大,这种布线方案不正确。

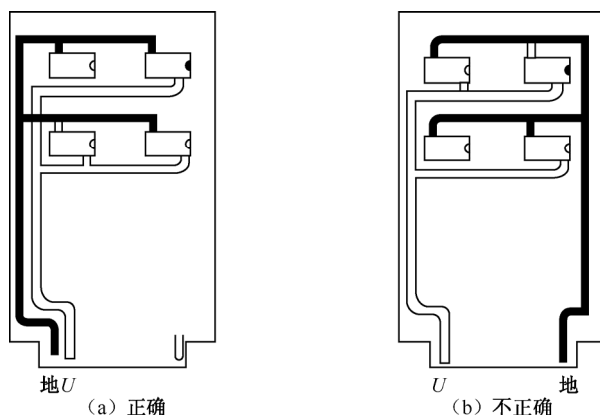


图 8-1 电源布线方案

(2) 时钟线、信号线和地线的位置。

图 8-2 (a) 中的信号线与地线距离较近，形成的环面积较小；而图 8-2 (b) 中信号线与地线距离远，形成环面积较大。所有采用如图 8-2 (a) 所示布线形式比较合理。

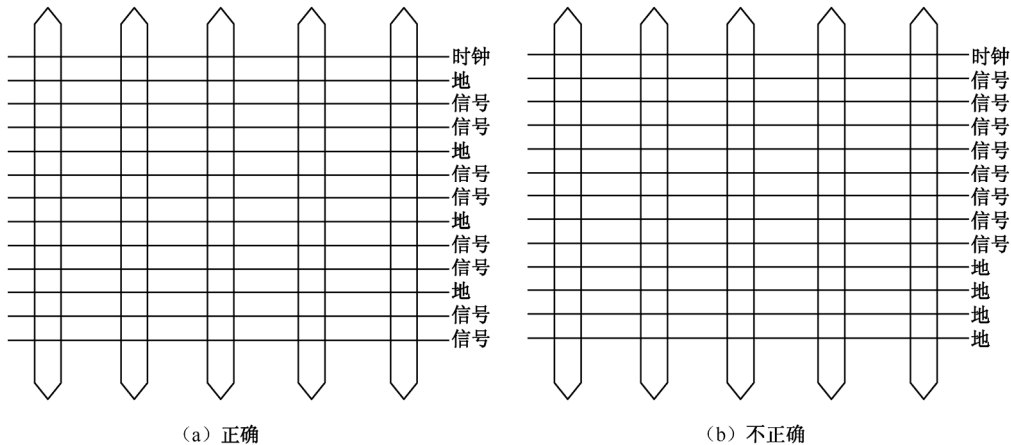


图 8-2 时钟线、信号线和地线的布线方案

(3) 按逻辑速度分割。

当需要在电路板上布置高速、中速和低速逻辑电路时，应按如图 8-3 所示布置图，高速的器件（快逻辑器件和时钟振荡器等）应安放在紧靠边沿连接器范围内；而低速逻辑器件和存储器，应安放在远离连接器范围内。这样对共阻抗耦合、辐射和交扰的减小都是有利的。

(4) 应避免印制电路板导线的不连续性。

- 迹线宽度不要突变；
- 导线不要突然拐角。

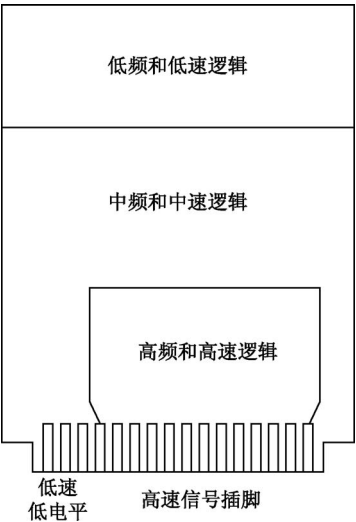


图 8-3 功能布置图

8.1.2 单面板和双面板几种地线的分析

1. 地线网络

平行地线概念的延伸是地线网络，这使信号可以回流的平行地线数目大幅度增加，从而使地线电感对任何信号都保持最小。这种地线结构特别适用于数字电路，如图 8-4 所示。

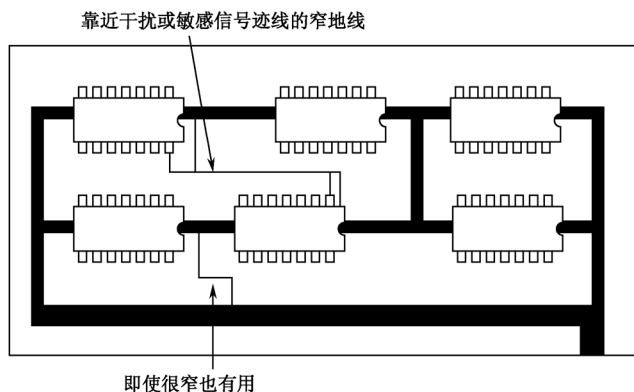


图 8-4 地线网络结构

在进行线路板布线时，首先应将地线网络布好，然后再进行信号线和电源线的布线。当进行双面板布线时，如果过孔的阻抗可以忽略，可以在线路板的一面走横线，另一面走竖线。高速信号线尽量靠近地线，以减小环路面积。

地线网络并不适合低频小信号模拟电路，因为这时要避免公共阻抗耦合。当电路的工作频带很窄时，地线上的高频骚扰并不是主要问题。为了降低对静电放电（ESD）的敏感性，一个低阻抗的地线网络很重要，但是必须与主参考地结构连接起来。这种连接可以是间接的（通过电容器），也可以是直接的。

在高速数字电路中，有一种地线方式是必须避免的，这就是“梳状”地线，如图 8-5 所示。这种地线结构使信号回流电流的环路很大，会增加辐射和敏感度，而且芯片之间的公共阻抗也可能造成电路的误操作。在梳齿之间加上横线，就很容易地将梳状地线结构变为地线网络了。

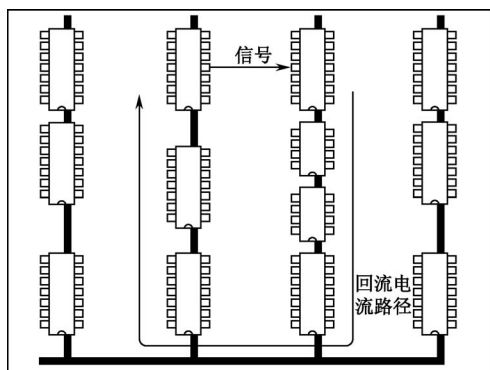


图 8-5 梳状地线结构

2. 地线面

地线网络的极端形式是平行的导线无限多，构成了一个连续的导体平面，称为地线面。这在多层板中很容易实现，它能提供最小的电感。这种结构特别适合于射频电路和高速数字电路。通常的四层板中还专门设置一个电源面，它能够在高频时提供一个低的源——地阻抗。

值得注意的是，从 EMC 的角度看，地线面的主要作用是减小地线阻抗，从而减少地线骚扰。地线面和电源面的屏蔽作用都很小，特别是当器件安装在线路板表面时，几乎没有屏蔽作用，将地线面和电源面布置在外层几乎没有什么好处，特别是考虑调试、维修和修改等因素时。

图 8-6 比较了地线面上任意两点之间的阻抗和一条导线的阻抗，在频率较高时，阻抗开始增加，这是集肤效应的结果，但这种效果是频率的平方根的函数（10 dB/十倍频程），而电感造成的阻抗变化与频率成正比（20 dB/十倍频程）。在地线面的中心位置，可以获得比较理想的阻抗；而在靠近边沿处，阻抗值将变为中心值的 4 倍。

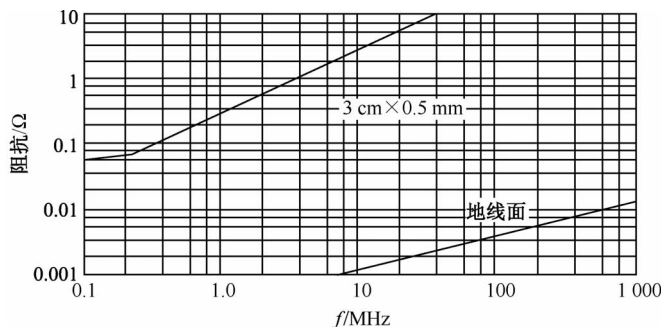


图 8-6 地线面与导线的阻抗比较

在双侧板上也可以使用地线面，这决不是简单地在没有用到的面积上布上铜箔，然后连接到地线上，因为地线面的目的是提供一个低阻抗的地线，因此它必须位于需要这种低阻抗地线的信号线的下面（或上面）。在高频，回流信号并不一定走几何上的最短路径，而会走最靠近信号线的路径。这是因为这种路径与信号线之间的环路面积最小，因此具有最小电感和最小阻抗。所以，地线面能够保证回流电流总是取最佳路径。如图 8-7 所示的是不同地线方式的比较。两根电流方向相反的平行导线的环路电感为

$$L = L_1 + L_2 - 2M \quad (8.1.1)$$

式中， L_1 ， L_2 ——每根走线的电感； M ——走线之间的互感， M 与两根走线之间的距离成反比，当两根走线重合时，有 $M = L_1 = L_2$ ， $L = 0$ 。

由于地线面与走线之间的距离很小，因而地线面能够减小信号环路的电感。

从以上讨论不难看出，地线面上的电流必须是连续的，这样才能取得预期的效果。当地线面必须断开时，应在重要的信号（如时钟信号）迹线下面设置一根连线，如图 8-8 所示。因此使用多层线路板布线及专门设置一层地线面是最简单的设计。

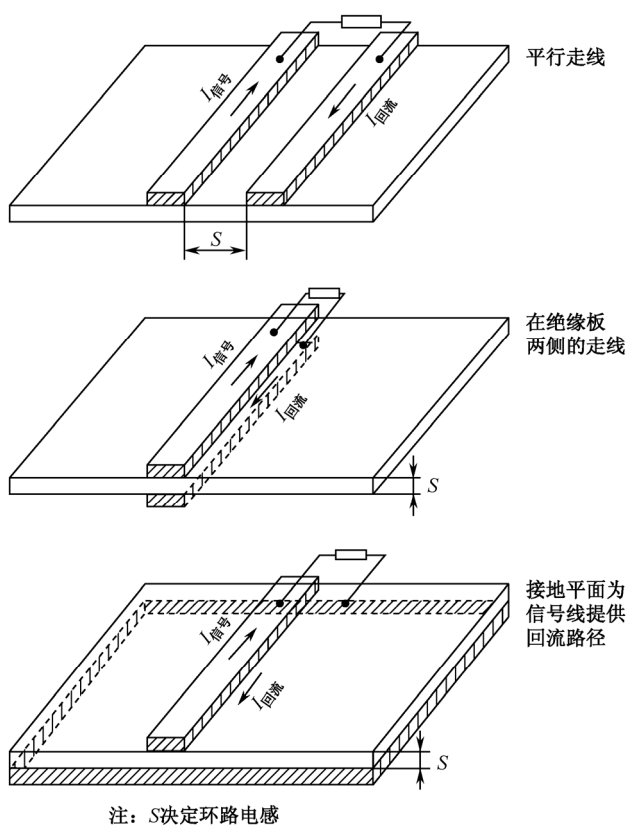


图 8-7 不同地线方式的比较

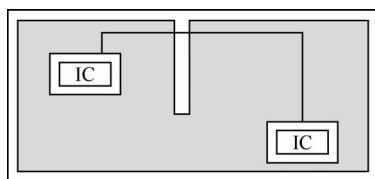


图 8-8 断开的地线面

地线面上因分开数字地和模拟地而需要开槽时，高速信号线不应跨越槽缝，以免环路面积扩大，因为电流总是走阻抗最小的途径。高频时，电流走环路电感最小的途径，环路面积越小，环路电感就越小。但如果高速信号线跨过槽缝，则回流线被迫绕过槽缝，使环路面积加大。必要时，可以在槽上架桥。例如，A/D 变换器就可置于桥上，其地脚如果在模拟地一侧，数字信号的回流就可过“桥”回到地脚，从而保持环面积最小。此“桥”也可用电容器架设。

此外，还应避免将连接器安装在槽缝上，因为如果两侧存在较大的地电位差，就会通过外接电缆产生共模辐射。

地面线还能有效地控制串扰，这是一种系统内 EMC 问题。走线之间的串扰机理有电感耦合、电容耦合和共阻抗耦合等，如图 8-9 所示。地线面可将公共地线阻抗 Z_g 减小

40~70 dB，地线面由于使不同的信号回路不在一个平面内，因此对减少电感耦合也有好处。地线面对电容耦合的改善是由于导线对地的电容 C_{1g} 、 C_{2g} 增大。

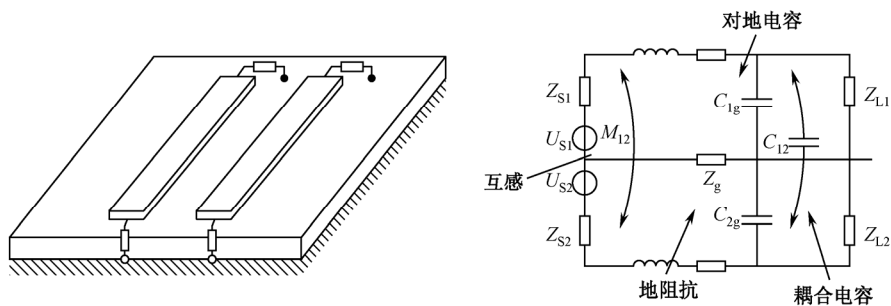


图 8-9 走线串扰机理

3. 环路面积

地线面的一个主要好处是能够使辐射的环路最小，从而保证了 PCB 的最小差模辐射和对外界骚扰的敏感度。当不使用地线面时，为了达到同样的效果，必须在高频电路或敏感电路的邻近设置一根地线。如图 8-10 (a)、(b) 所示的是两种错误的布线方式。

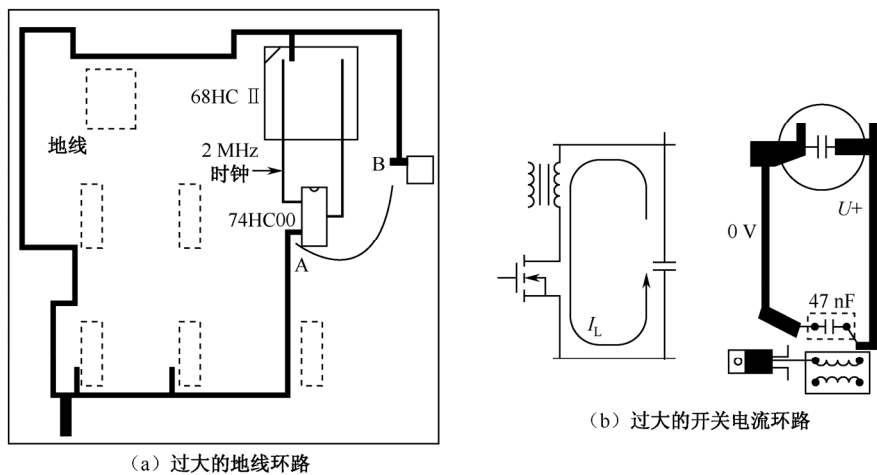


图 8-10 错误接地的例子

图 8-10 (a) 所示的是微处理器 68HCII 的 2 MHz E 时钟信号送到 74HC00，而 74HC00 的另一个输出送回到微处理器的一个输入端。两个芯片的距离较近，可以使连接线尽量短。但它们的地线连接到了一根长地线的相反的两端，结果使 2 MHz 时钟信号的回流绕 PCB 整整一周，其环路面积实际是线路板的面积。实际上，可从 A 到 B 连接一根短线，使 2 MHz 时钟的谐波辐射减少 15~20 dB，如果使用地线网格，可以进一步使辐射降低。

图 8-10 (b) 所示的是一个工作频率为 400 kHz 的功率为 MOSFET 构成的开关电源，瞬变时间为 10 ns 数量级，因此开关波形的谐波分量超过了 100 MHz。去耦电容器距离开关管的距离有几厘米 (cm)，结果在电源和地线之间形成了较大的环路。在开关

管和变压器的邻近设置一只 47 nF 的射频去耦电容, 有效地减小了这个环路中的射频电流, 结果使 10 MHz 以上的传导发射减小了 20 dB 。

表面安装技术能够有效地减小信号环路面积。但为了充分发挥表面安装技术的优点, 应使用专门有一层地线面的多层板布线。在双层板上使用表面安装技术仅能获得有限的改进, 因为在双层板中使用表面安装技术仅仅将整个板的尺寸减小了, 也就是将走线减少了。而在多层板中, 信号环路面积明显得到减小。

4. 输入/输出地线的结构

前面已指出, 为了减小电缆上的共模辐射, 需要对电缆采取滤波和屏蔽技术。但无论滤波还是屏蔽都需要一个没有受到内部骚扰污染的干净地线。当地线不干净时, 在高频滤波时几乎没有作用。除非在布线时就考虑这个问题, 一般这种干净地线是不存在的。干净地线既可以是 PCB 上的一个区域, 也可以是一块金属板, 所有输入与输出线的滤波和屏蔽层必须连接到干净地线上, 如图 8-11 所示。干净地线与内部的地线只能在一点相连, 以避免内部电流流过干净地线而造成污染。

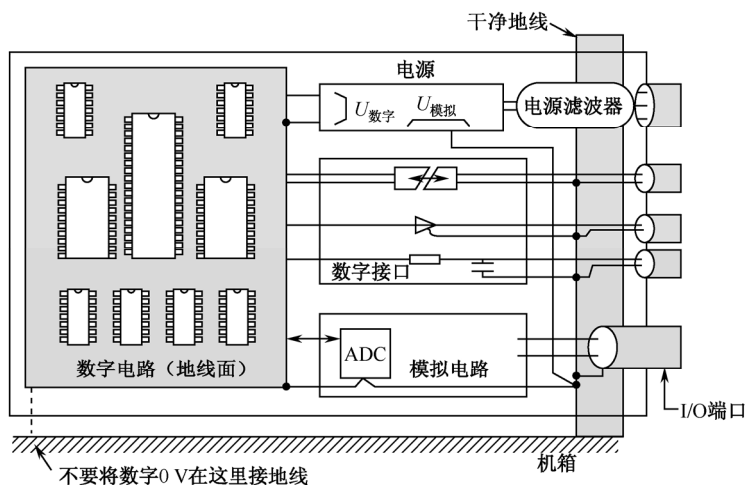


图 8-11 接口的接地线

为了 ESD 防护的目的, 必须将电路地线连接到机壳上。当电路地线与机壳需要直流隔离时, 可以使用一个 $10\sim 100\text{ nF}$ 的射频电容器连接。

绝对不要将数字电路的地线面与模拟电路地线面的区域重叠, 因为这样会使数字电路骚扰耦合进模拟电路。数字地线与模拟地线可以在数/模转换器的部位单点连接。

直接与数字电路相连的接口应使用缓冲器, 以避免直接连到数字电路的地线上, 较理想的接口是光隔离器, 当然这会增加成本。当不能提供隔离时, 可以使用以输入和输出地线为参考点的缓冲芯片, 或者使用电阻或扼流圈缓冲, 并在线路板接口处使用电容滤波。

5. 地线布线规则

由于对所有的信号线都实现最佳地线布线是不可能的, 因此在设计时应重点考虑最

重要的部分。从 EMI 的角度考虑，最重要的信号是高电流变化率 (di/dt) 信号，如时钟线、数据线及大功率方波振荡器等。从敏感度的角度考虑，最重要的信号是前后沿触发输入电路、时钟系统及小信号模拟放大器等。一旦将这些重要信号分离出来，就可以把设计的重点放在这些电路上。

在产品的设计过程中，一个有效的工具是地线图。这是一张关于设备中所有地线连接的图，包括：所有的地线参考点和地线路径（通过机箱、电缆屏蔽层、走线和导线等）。这张图中仅有地线，其他电路可以简化。在产品开发的整个过程中，这张图的制作、保存和实施都由指定的 EMC 设计师来执行。

8.1.3 多层板

对高速逻辑电路设计，使用单面板或双面板不能满足电磁兼容性要求时，应该考虑应用多层板。大部分多层板的通用形式如图 8-12 所示。该图形显示了各层结构的设想和每层功能的指定。

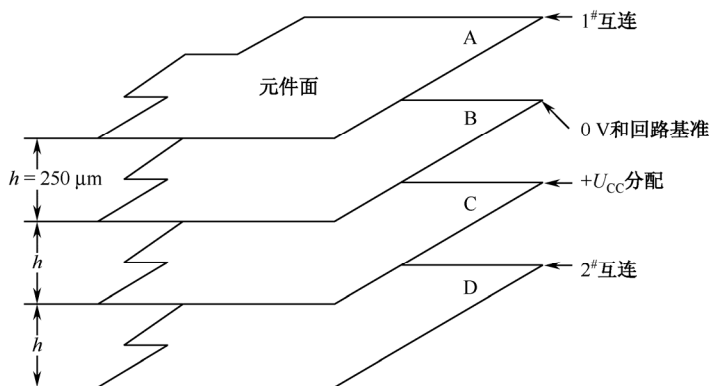


图 8-12 多层印制电路板

多层印制电路板是由预浸环氧玻璃布把一层以上的分离导电图形固结层压而成的。电源和回路总线是由非浸蚀 $35\ \mu\text{m}$ 铜箔板构成的。这样，电源分配系统组成大的平面，具有极低的分布源阻抗。因此，多层板比单面板或双面板更能为避免共阻抗耦合提供屏蔽（取决于布局）及使多电平电压分配得到改善。多层板的缺点是只适用于在设计预期变化不大或没有变化的场合。

在图 8-12 中板间是通过金属化孔互连的，第一层被指定为互连板，含有元器件。第二层被指定为 $0\ \text{V}$ 和回路基准电位，除了用于连接第一层与第三层的贯通孔之外，它是一个整体的地平面。第三层被指定为 $+U_{\text{CC}}$ 分配层。第四层和第一层一样被指定为互连板。实质上，第一层上的走线与第二层地平面构成微带线，因此能严格地控制阻抗。 $0\ \text{V}$ 回路层和 U_{CC} 分配层形成一个低阻抗的电源分配系统，这归因于板间的大电容、铜箔的低电感和低电阻。它们还可以作为一层和四层辐射骚扰的屏蔽。

如果两块互连板彼此叠放在一起，则相关的互连线要相互成正交，以减少互连板间的交扰（串音）耦合。军事上应用的高速逻辑电路通常由 $0\ \text{V}$ 回路板或 U_{CC} 板来屏蔽互

连板。有时,还可在 0 V 层和 U_{CC} 层之间加进专设的地网层,以进一步增加阻抗控制。

多层印制板设计中遇到的主要问题是电磁兼容设计。在进行多层印制板设计时,首先要考虑的是带宽。要强调的是:数字电路电磁兼容设计中要考虑的是数字脉冲的上升沿和下降沿所决定的带宽,而不是数字脉冲的重复频率。矩形周期数字脉冲的傅里叶展开形式为

$$C_A = 2A \frac{t_0 + t_r}{T} \cdot \frac{\sin[n\pi(t_0 + t_r)/T]}{n\pi(t_0 + t_r)/T} \cdot \frac{\sin[n\pi t_r/T]}{n\pi t_r/T} \quad (8.1.2)$$

式中, t_0 ——数字脉冲宽度;

t_r ——数字脉冲的上升时间;

T ——数字信号的重复周期。

根据这个结果,可以把方形数字信号的印制板设计带宽定为 $1/\pi t_r$,通常要考虑这个带宽的十倍频。

多层印制板的电磁兼容分析可以基于克希霍夫定律和法拉第电磁感应定律。根据克希霍夫定律,任何时域信号由源到负载的传输都必须构成一个完整的回路,一个频域信号由源到负载的传输都必须有一个最低阻抗的路径。这个原则完全适合高频辐射电流的情况。如果高频辐射电流不是经由设计中的回路到达目的负载,就一定是通过某个客观存在的回路到达的,那么这一非正常回路中的一些器件就会遭受电磁骚扰。但是,人们常常忽略这个事实。在数字电路设计中,最容易忽略的是存在于器件、导线、印制线和插头上的寄生电感、电容和导纳。例如,电容器的等效电路应当是电容、电感和电阻构成的串联电路。多层印制板设计要决定选用的多层板的层数。多层印制板的层间安排随着电路而变,但有以下几条共同原则:

① 电源平面应靠近接地平面,并且安排在接地平面之下。这样可以利用两金属平板间的电容作为电源的平滑电容,同时接地平面还对电源平面上分布的辐射电流起到屏蔽作用。

② 布线层应安排与整块金属平面相邻。这样的安排是为了产生通量对消作用。

③ 把数字电路和模拟电路分开,有条件时将数字电路和模拟电路安排在不同层内。如果一定要安排在同层,可采用开槽、加接地线条和分割等方法补救。模拟的和数字的地、电源都要分开,不能混用。数字信号有很宽的频谱,是产生骚扰的主要来源。

④ 在中间层的印制线条形成平面波导,而在表面层形成微带线,两者传输特性不同。

⑤ 时钟电路和高频电路是主要的骚扰和辐射源,一定要单独安排,远离敏感电路。

⑥ 不同层所含的杂散电流和高频辐射电流不同,布线时不能同等看待。

例如,一个 10 层板的层间安排:第一层为优质布线层、第二层为地线、第三层为布线层、第四层为另一布线层、第五层为地线、第六层为电源层、第七和第八层为布线层、第九层为地线、第十层为最后一个布线层。这种结构共有六个布线层、三个地线,在第三和第四层及第七和第八层之间有填充层。层间安排确定后,根据布线的密集程度就可以确定采用多层板的层数和基本结构。

多层印制板设计中两个基本原则用来确定印制线条的间距和边距,现介绍如下:

20-H 原则 这是 W.Michael King 提出的。具体表述如下：所有的具有一定电压的印制板都会向空间辐射电磁能量，为减小这个效应，印制板的物理尺寸都应该比最靠近接地板的物理尺寸小 $20H$ ，其中 H 是两层印制板的间距。在一定频率下，两个金属板的边沿场会产生辐射。减小一块金属板的边界尺寸使其比另一个接地板小，辐射将减小。当尺寸小至 $10H$ 时，辐射强度开始下降；当尺寸小至 $20H$ 时，辐射强度下降 70%。根据 20-H 原则，按照一般典型印制板尺寸， $20H$ 一般为 3 mm 左右。

2-W 原则 当两条印制线间距比较小时，两线之间会发生电磁串扰。串扰会使有关电路功能失常。为避免发生这种骚扰，应保持任何线条间距不小于 2 倍的印制线条宽度，即不小于 $2W$ ， W 为印制线条的宽度。印制线条的宽度取决于线条阻抗的要求，太宽会减小布线的密度，增加成本；太窄会影响传输到终端的信号的波形和强度。

印制板地线是印制板设计的另一个基本问题。首先，要建立分布参数的概念，当高于一定频率时，任何金属导线都要看成是由电阻、电感构成的器件。所以，接地引线具有一定阻抗并且构成电气回路，不管是单点接地还是多点接地，都必须构成低阻抗回路进入真正的地或机架。25 mm 长的典型印制线会分布 15~20 nH 的电感，加上分布电容的存在，就会在接地板和设备机架之间构成谐振电路。其次，接地电流流经接地线时，会产生传输线效应和天线效应。当线的长度为波长的 $1/4$ 时，可以呈现出很高的阻抗，接地线实际上是开路的，接地线反而成为向外辐射的天线。最后，接地板上充满高频电流和骚扰形成的涡流，从而在接地点之间构成许多回路，而这些回路的直径（或接地点间距）应小于最高频率波长的 $1/20$ 。选择恰当的器件是设计成功的重要因素，特别在选择逻辑器件时，尽量选上升时间大于 5 ns 的器件，决不要选比电路要求时序快的逻辑器件。

在 PCB 设计中，布线是完成产品设计的重要步骤，可以说前面的准备工作都是为它而做的，在整个 PCB 中，以布线的设计过程限定最高、技巧最细、工作量最大。但如果布线不当，则会产生严重的电磁干扰。因此，为了合理地进行 PCB 布线，使设计出的产品具有更好的电磁兼容性，应遵循以下一些基本原则：

① 印制导线的布设。导线的布设应尽量短，在高频回路中更应如此，同一元件的各条地址线或数据线尽量保持一样长；印制导线的拐弯应成圆角，因为直角或尖角在高频电路和布线密度高的情况下会影响电气性能；当双面板布线时，双面的导线应相互垂直、斜交或弯曲走线，避免相互平行，以减小寄生耦合；作为电路的输入及输出用的印制导线应尽量避免相邻平行，最好在这些导线之间加接地线。

② 印制导线的宽度。导线宽度应满足电气性能要求而又便于生产，它的最小值根据承受的电流大小而定，但最小不宜小于 0.2 mm；在高密度、高精度的印制线路中，导线宽度和间距一般可取 0.3 mm。在大电流情况下还要考虑其温升，单面板试验表明，当铜箔厚度为 50 μm 、导线宽度为 1~1.5 mm、通过电流为 2A 时，温升很小，因此，一般选用 1~1.5 mm 宽度导线就可以满足设计要求而不致引起温升。印制导线的公共地线应尽量粗，如果可能，应使用宽度大于 2~3 mm 的线条，这点在带有微处理器的电路中尤为重要，因为当地线细时，流过电流的变化、地电位变动和微处理器定时信号的

电平不稳都会使噪声容限劣化。在 DIP 封装的 IC 引脚间走线,可应用 10-10 与 12-12 原则,即当两引脚间通过两根线时,焊盘直径可设为 50 mil、线宽与线距都为 10 mil;当两引脚间只通过一根线时,焊盘直径可设为 64 mil、线宽与线距都为 12 mil。

③ 印制导线的间距。相邻导线间距必须满足电气安全要求,而且为了便于操作和生产,间距也应尽量宽些。最小间距至少要能适合承受的电压。这个电压一般包括工作电压、附加波动电压及其他原因引起的峰值电压。如果有关技术条件允许导线之间存在某种程度的金属残粒,则其间距就会减小。因此,设计者在考虑电压时应把这种因素考虑进去。在布线密度较低时,信号线的间距可适当加大,对于高、低电平悬殊的信号线应尽量缩短且加大间距。

④ 印制电路问题。印制电路中不允许有交叉电路,对于可能交叉的线条,可以用“钻”、“绕”两种办法解决,即让某引线从别的电阻、电容、三极管引脚下的空隙处“钻”过去,或从可能交叉的某条引线的一端“绕”过去。在特殊情况下,如果电路很复杂,为简化设计也允许用导线跨接,解决交叉电路问题。

⑤ 印制导线的屏蔽与接地。印制导线的公共地线,应尽量布置在印制线路板的边沿部分。在印制线路板上应尽量多地保留铜箔做地线,这样得到的屏蔽效果比一长条地线要好,传输线特性和屏蔽作用也将得到改善,而且还起到减小分布电容的作用。印制导线的公共地线最好形成环路或网状,这是因为当在同一块板上有许多集成电路,特别是有耗电多的元件时,由于图形上的限制产生了接地电位差,从而引起噪声容限的降低,当做成回路时,接地电位差减小。另外,接地和电源的图形尽量与数据的流动方向平行,这是抑制噪声能力增强的秘诀。多层印制线路板可采取其中若干层作为屏蔽层,电源层、地线层均可视为屏蔽层,一般地线层和电源层设计在多层印制线路板的内层,信号线设计在内层和外层。还要注意的,数字区与模拟区尽量隔离,并且数字地线与模拟地线要分离,最后接于电源地线。

➔ 8.2 旁路和去耦

8.2.1 物理特性

1. 阻抗

电容器的阻抗表示为

$$|Z| = \sqrt{R_s^2 + (2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC})^2} \quad (8.2.1)$$

式中, Z ——阻抗,单位为 Ω ;

R_s ——等效串联电阻 ESR,单位为 Ω ;

L ——等效串联电感 ESL,单位为 H;

C ——电容,单位为 F;

f ——旁路,单位为 Hz。

从式 (8.2.1) 得出, 在谐振频率为 f_0 时, Z 拥有最小值, 该频率为

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (8.2.2)$$

实际上, 阻抗公式 [式 (8.2.1)] 反映的是内在的参数, 用 ESR 和 ESL 来描述它们。ESR 表示电容器中的电阻损耗。这个损耗包括金属电极分布电阻、内部电极间的接触电阻, 以及外部端接点电阻。注意, 高频下的集肤效应增加了器件的引线电阻值。因此, 高频 ESR 大于直流下的 ESR。

ESL 是一个损耗单元, 当限制电流在部件封装内流动时, 必须要克服这个因素。限制越严, 对电流密度要求越高, 对 ESL 要求也越高。为了减少这个寄生参数, 要考虑宽和长的比例。考察式 (8.2.1), 可得到一个用 ESR 和 ESL 表示的同一公式的变形:

$$|Z| = \sqrt{(\text{ESR})^2 + (X_{\text{ESL}} - X_C)^2} \quad (8.2.3)$$

其中, $X_{\text{ESL}} = 2\pi f(\text{ESL}), X_C = \frac{1}{2\pi fC}$

某些介质电容器, 其电容值随温度和直流偏压而变化。等效串联电阻随温度、直流偏压和频率变化, 与此同时, 等效串联电感保持相对不变。

对于一个理想的平板电容器来说, 当电流单一地从一侧流出注入另一侧时, 电感实际上为零。在这种情况下, 高频下的 Z 将等于 R_S , 不存在固有谐振。这正是 PCB 中的电源和接地层的特性。

理想电容器的阻抗随频率衰减的速率为 -20 dB/十倍频程 。因为电容器的导线上存在电感, 则这电感使得电容器是非理想的。

必须注意到, 由于不可能理想地布线以有效地消除磁通量, 双面板上的长电源走线相当于增加电容器引线长度, 因而将严重改变配电系统的自谐振。

当高于自谐振频率时, 电容器的阻抗变为感性, 并且以 $+20 \text{ dB/十倍频程}$ 的速率增加。当低于自谐振频率时, 电容器就不再有电容器的特性了。ESR 的值非常小, 因此它不能显著地影响电容器的自谐振频率。

在一特定频率下, 减少电源分布噪声对电容器产生的影响由下式表示:

$$\Delta V(f) = |Z(f)| \times \Delta I(f) \quad (8.2.4)$$

式中, ΔV ——加了修正的允许电压; ΔI ——部件上的电流; f ——频率。

在确保杂波没有超过允许的限度下, 为了优化配电系统, 对于给定的电流, $|Z|$ 必须小于 $\Delta V/\Delta I$ 。最大的 $|Z|$ 应该由最大的 ΔI 估算出。如果 $\Delta I = 1 \text{ A}$, 同时 $\Delta V = 3.3 \text{ V}$, 则该电容器的阻抗必须小于 3.3Ω 。

为了使理想电容器工作在所需状态下, 该部件应该有高的 C 值, 使其在工作频率上有小的阻抗, 还应有低的 L 值以使阻抗在更高频率下不增加。另外, 电容器必须有一个低的 R_S 值, 以得到最小可能的阻抗。正是这个原因, 电源和接地层结构是 PCB 板上提供低阻抗去耦的最佳选择, 它优于离散元件。

2. 能量存储

理想的去耦电容器可以提供逻辑装置状态变换时所需的所有电流。而在双层板上使用去耦电容器也可减少供电电压的波动。表达式为

$$C = \Delta I / \Delta V / \Delta t \quad (8.2.5)$$

$$\text{即} \quad \frac{20 \text{ mA}}{100 \text{ mV} / 5 \text{ ns}} = 0.001 \mu\text{F} = 1\,000 \text{ pF} \quad (8.2.6)$$

式中, ΔI ——转换电流; ΔV ——允许供电电压改变(波动); Δt ——切换时间。

注意: 对于 ΔV , EMI 的需求通常比芯片运行的要求更高。

去耦电容器的频率响应依赖于对电流突变的需要。根据电容器提供电流的能力来解释频域阻抗响应是有用的。电荷转移能力也用来说明时域特性。在经历一个相对慢的转换时, 这种电源和接地层间的低频阻抗决定了电压变化的多少。在快速转换时, 响应是电压波动的时间平均值。在低阻抗下, 当电压突变时有更多的电流可供给电子元件。高频阻抗决定了在电压快速转变时该电路板最初能提供多少电流。具有最小阻抗的板子(高于 100 MHz), 在突变最初的几纳秒(ns)内, 达到最大量的电流供应(对一个给定的电压变化)。

3. 谐振

当选择旁路和去耦电容时, 可通过逻辑系列和所使用的时钟速度计算电容器的充、放电频率(自谐振频率)。必须根据该电容器在电路中的容抗选择电容值。低于自谐振频率, 则电容器表现为容性; 高于自谐振频率, 则该电容表现为感性, 并减少了 RF 去耦。SMT 电容器的自谐振频率总是更高些。因为它有更低的引线电感和更小的封装尺寸, 并且没有长的径向或轴向引线。

在对不同封装尺度的 SMT 电容器进行 SPICE 测验或分析时, 都具有相同电容值的所有电容器, 在保持其他测验参数不变的情况下, 不同封装尺寸的电容器其自谐振频率仅有几兆赫(MHz)的改变。包装尺寸为 1210、0805 和 0603 的 SMT 电容器, 在现在的产品中很常见, 它使用不同的电介质材料。电容量保持常数的不同封装器件, 不同封装之间只是引线电感不同。电介质材料对改变电容器的自谐振频率无明显作用。不同的封装尺寸, 就 SMT 包装过程中引线长度电感的不同而言, 自谐振频率的变化不明显, 其范围在 $\pm(2 \sim 5)$ MHz 之间。

在实验环境下对大量的电容器样品进行测试后, 观察到一个有趣的现象: 与预测一样, 在分析得到的频率上该电容器发生自谐振。根据大量样品, 该自谐振频率改变显著。这个自谐振频率的变化来源于电容器的公差率。因为在制作过程中, 电容器的公差率通常为 +10%, 更贵一些的电器是在 $\pm(2\% \sim 5\%)$ 。因为制作过程中使用的电容器的物理尺寸是固定的, 电容值可根据电介质的厚度和种类或其他参数来改变。制作上的公差影响元件的电容值, 实际的自谐振频率依赖于器件的公差比率。如果一个设计需要严格的去耦量, 就要求使用精确的、价格较高的电容器。谐振方程很容易说明公差的变化。

引线电容只不过是具有引线的表面安装器件。平均来说, 一个典型的引线电容其电

感值平均约为每 0.1 in (2.54 mm) 引线 (指高出板子表面的长度) 2.5 nH; 表面安装电容器的引线电感平均为 1 nH。

电感器不像电容器那样改变谐振响应, 而是当频率改变时其阻抗值也改变。但是电感器周围的寄生电容会产生并联谐振进而改变其响应。电路的频率越高, 其阻抗越大。射频电流通过阻抗时产生射频电压。其结果是, 依照欧姆定律 $V_{rf} = I_{rf} \times Z_{rf}$, 部件中有射频电流产生。当在去耦电路中使用电容器时, 引线所产生的电感在设计中是要着重考虑的。SMT 电容器在更高频率时的性能比径向或轴向电容要好, 这是因为它有更低的内部引线电感。

当电容器适当地安装在 PCB 上时, 可得到有效的容性去耦。随意安装或过量使用电容器是一种材料浪费。某些时候, 合理地减少电容器的安装, 可更好地执行去耦功能。在特定应用时, 两个并联电容要求提供更宽频带的射频抑制。为了获得最佳特性, 这两个并联电容器必须相差两个量级幅度或值 (如 0.1 μF 和 0.001 μF 或 100 倍)。

4. 电源和接地层的好处

使用多层 PCB 的一个好处是可以将电源和接地层彼此靠近安装。这两个板的物理关系产生了一个大的去耦电容器。这个电容器通常为低速率 (慢边沿速率) 设计提供了足量的去耦; 但是, 增加层的同时增加了 PCB 的成本费用。如果部件的信号边沿慢于 10 ns (例如, 标准 TTL 逻辑), 就不需要使用高性能、高自谐振频率的电容器。但是需要使用体电容器来维持适当的电压水平。出于性能的原因, 电容值在 0.1~10 μF 范围较适合于部件电源引脚。

当使用电源和接地层作为主要的去耦电容器时, 要考虑另一个因素, 即这种自带的电容器的自谐振频率。如果电源和接地层电容的自谐振频率与安装在板上的集总去耦电容器的自谐振频率一样, 则在这两个频率相遇的地方, 将有尖锐的共振, 并不再有一个宽的去耦谱段分布。如果时钟同步的频率也是在这个尖锐的共振频率上, 那么这个板表现为存在很少的去耦。如果这种状况发生了, 该 PCB 变成了一个非预期的可能不符合电磁干扰要求的发射器。假如发生这种情况, 使用具有不同自谐振频率的附加去耦电容, 可避免发生与 PCB 电源和接地层的尖峰共振。

改变电源和接地层自谐振频率的一个简单的方法就是改变这两个层间的空间距离。而增加或减少叠层的分离高度或在叠层中重新定位将改变系统的电容值。使用这种技术的一个不利之处在于信号布线层的阻抗也要改变。许多多层 PCB 的自谐振频率通常为 200~400 MHz。

以前, 较慢的逻辑器件在 PCB 电源和接地层自谐振频率之下的区域工作很好。使用更先进设计技术的逻辑器件达到或超过了这个临界的共振频率。当电源板的阻抗和去耦电容器达到这个相同的共振频率时, 将发生严重的性能退化。这退化的高频阻抗将导致严重的电磁干扰问题。实质上, 这个集成的 PCB 变成了一个非预想的发射器。PCB 不是真正的发射器, 高度重复的电路或时钟是射频能量产生的原因。去耦不能解决这类问题, 而需要用系统级的封装方法来解决。

8.2.2 电容

在产品设计中，通常采用并联去耦电容来提供更大的工作频带，减少接地不平衡。接地不平衡是在 PCB 中产生电磁干扰的一个因素。当使用并联去耦时，不要忘记存在第三个电容器：电源和接地层结构。

当部件转换去消耗直流能量时，将在配电网络中产生一个瞬间脉冲。因为供电网络中存在一个有限的电感，去耦提供了局部化的点电源电荷。通过将电压保持在一个稳定的参考点上，防止出现错误的逻辑切换。去耦电容器减少了辐射，这是通过提供一个非常小的为产生高频谱分量的切换电流的环路面积，以代替部件和远端电源间的一个大的环路面积的结果。

研究多重去耦电容的有效性表面：并联电容在高频情况下没有明显的效果，比使用单个大容量的电容器仅仅改善了 6 dB。虽然 6 dB 对抑制射频电流看起来是一个小数，但按照国际电磁干扰规范，它可能使一个不合格的产品变成一个合格的产品。研究表明：高于自谐振频率时，大电容值的电容器阻抗随频率增加而增加（感性），小电容值的电容器阻抗随频率增加而减小（容性）。同一个原因，小电容值的电容器阻抗比大电容值的电容器阻抗要小，并占支配地位，它比大电容值电容器单独存在时提供更小的净阻抗。

这个 6 dB 的改善主要是并联电容提供了更小的引线电感和器件体电感的结果。这样从电容器内板中并联引出两套平行导线。两条引线比只有一套引线提供了更宽的通道。更宽的通道就会有更少的引线长度电感。这个减少了的引线长度电感是并联电容器工作如此之好的主要原因。

为了消除部件同时转换全部信号引脚时（希望并联去耦）产生的射频电流，通常的做法是安装两个并联电容器（0.1 μF 和 0.001 μF ），并分别直接连在两个电源引脚上。如果在 PCB 方案中使用并联去耦，必须意识到其电容值要相差两个数量级或 100 倍。并联电容器总的电容值不重要，而由并联电容器（存在自谐振频率）提供的并联响应是一个重要的因素。

为了使并联旁路效果更佳，以及仅允许使用一个电容器，就必须减少电容器的引线电感。当在 PCB 上安装电容器时，总是存在一定数量的引线电感。注意，引线长度必须包括连接电容器到板子的走线的长度。无论是用单个还是多个并联去耦，减少引线长度都会使性能变得更好。另外，一些工厂提供的电容器可显著减少内部的体电感。

8.2.3 引线电感

所有电容器都存在引线电感和期间电感，过孔也增加电感值。在任何时候都必须减少引线电感。当安装附加有引线电感的信号走线时，在部件接地引脚和系统接地板之间，将出现高阻抗失配。当存在走线阻抗失配时，在两源之间就要产生电压梯度，导致射频

电流。在 PCB 上, 射频场产生射频辐射, 因此, 必须设计去耦电容使引线电感最小化, 这包括过孔和引脚延线。

在电容器中, 介质材料决定了自谐振频率的零点值。所有介质材料都是温度敏感的。电容器的电容值将随环境温度的变化而变化。在特定温度下, 电容值改变很多可能导致非适合的运行性能, 或作为旁路或去耦电容作用时, 失去部分运行性能。介质材料的温度特性越稳定, 电容器的工作特性就越好。

在介质材料的温度敏感性之外, 等效串联电感 (ESL) 和等效串联电阻 (ESR) 在所考虑的运行频率时, 必须要小。ESL 的作用等同于寄生电感器, 而 ESR 的作用等同于寄生电阻, 它们都与电容器串联。ESL 在相当小的 SMT 电容器中不是主要因素。径向或轴向引线部件总是存在一个大的 ESL 值。同时, ESL 和 ESR 将削弱电容器作为旁路器件的效果。当选择电容器时, 应选择 ESL 和 ESR 值满足要求的电容器。随机地选择标准电容器, 如果 ESL 和 ESR 过高, 可能导致不合适的运行性能。由于多数电容器厂家不公布 ESL 和 ESR 值, 当选择用于高速、高技术 PCB 的电容器时, 应注意选择合适的参数。

因为表面安装的电容器有足够小的 ESL 和 ESR, 它们比径向或轴向类型更合适。通常, ESL 小于 1.0 nH 时, ESR 为 0.5 Ω 或更小。对去耦电容器来说, 电容值公差、温度稳定性、介质常数、ESL 和 ESR 的重要性和自谐振频率相比是次要的。

➔ 8.3 变频器应用中的电磁兼容应用

在各种工业控制系统中, 随着变频器等电力电子装置的广泛应用, 系统的电磁干扰 (EMI) 日益严重, 相应的抗干扰设计技术已经变得越来越重要。变频器系统的干扰有时能直接造成系统的硬件损坏。

8.3.1 干扰来源

首先是来自外部电网的干扰。电网中的谐波干扰主要通过变频器的供电电源干扰变频器。电网中存在大量谐波源如各种整流设备、交直流互换设备、电子电压调整设备, 非线性负载及照明设备等。这些负荷都使用电网中的电压、电流产生波形畸变, 从而对电网中其他设备产生具有危害的干扰。变频器的供电电源受到来自被污染的交流电网的干扰后若不加处理, 电网噪声就会通过电网电源电路干扰变频器。对变频器的供电电源的干扰主要有:

- (1) 过压、欠压、顺时掉电;
- (2) 浪涌、跌落;
- (3) 尖峰电压脉冲;
- (4) 射频干扰。

1. 晶闸管换流设备对变频器的干扰

当供电网络内有容量较大的晶闸管换流设备时,由于晶闸管总是在每相半周期内的部分时间内导通,容易使网络电压出现凹口,波形严重失真。它使变频器输入侧的整流电路有可能因较大的反向回复电压而受到损害,从而导致输入回路被击穿而烧毁。

2. 电力补偿电容对变频器的干扰

电力部门对用电单位的功率因数有一定的要求,为此,许多用户都在变电所采用集中电容补偿的方法来提高功率因数。在补偿电容投入或切出的暂态过程中,网络电压有可能出现很高的峰值,其结果是可能使变频器的整流二极管因承受过高的反向电压而击穿。其次是变频器自身对外部的干扰。变频器的整流桥对电网来说是非线性负载的,它所产生的谐波对同一电网的其他电子、电气设备产生谐波干扰。另外变频器的逆变器大多采用 PWM 技术,当工作于开关模式且作高速切换时,会产生大量耦合性噪声,因此变频器对系统内其他的电子、电气设备来说是一个电磁干扰源。

在变频器的输入和输出电流中,都含有很多高次谐波成分。除了能构成电源无功耗的较低次谐波外,还有许多频率很高的谐波成分。它们以各种方式把自己的能力传播出去,产生了对变频器本身和其他设备的干扰信号。

(1) 输入电流的波形。变频器的输入侧是二极管整流和电容滤波电路。显然只有电源的线电压 u_1 大于电容器两端的直流电压 u_d 时,整流桥中才有充电电流。因此,充电电流总是出现在电源电压的振幅值附近,呈现不连续的冲击波形式,具有很强的高次谐波成分。有关资料表明,输入电流的 5 次谐波和 7 次谐波的谐波分量是最大的,分别是 50 Hz 基波的 80% 和 70%。

(2) 输出电压与电流的波形。绝大多数变频器的逆变桥都采用 SPWM 调制方式,其输出电压为占空比按正弦规律分布的系列矩形波;由于电动机定子绕组的电感性质,定子的电流十分接近于正弦波。但其中与载波频率相等的谐波分量仍是较大的。

8.3.2 传播方式

变频器能产生功率较大的谐波,由于功率较大,对系统其他设备的干扰性较强,其干扰途径与一般电磁干扰途径是一致的,主要分传导(即电路耦合)、电磁辐射、感应耦合。具体为:首先对周围的电子、电气设备产生电磁辐射;其次对直接驱动的电动机产生电磁噪声,使得电动机铁耗和铜耗增加,并传导干扰到电源,通过配电网络传导给系统其他设备;最后变频器对相邻的其他线路产生感应耦合,感应出干扰电压或电流。同样,系统内的干扰信号通过相同的途径干扰变频器的正常工作。

1. 电路耦合方式

即通过电源网络传播。由于输入电流为非正弦波,当变频器的容量较大时,将使网络电压产生畸变,影响其他设备工作,同时输出端产生的传导干扰使直接驱动的电机电损、铁损大幅增加,影响了电动机的运转特性。显然,这是变频器输入电流干扰信号的

主要传播方式。

2. 感应耦合方式

当变频器的输入电路或输出电路与其他设备的电路靠得很近时，变频器的高次谐波信号将通过感应的方式耦合到其他设备中去。感应的方式又有以下两种：

(1) 电磁感应方式，这是电流干扰信号的主要方式。

(2) 静电感应方式，这是电压干扰信号的主要方式。

3. 空中辐射方式

即以电磁波方式向空中辐射，这是高频谐波分量的主要传播方式。

8.3.3 电磁兼容对策

根据电磁兼容的基本原理，形成电磁干扰须具备三要素：电磁干扰源、电磁干扰途径、对电磁干扰敏感的系统。实际工作中可采用硬件抗干扰和软件抗干扰两种方式来防止干扰。其中，硬件抗干扰是应用措施系统中最重要也是最基本的抗干扰措施，一般从抗和防两方面入手来抑制干扰，其总原则是抑制和消除干扰源、切断干扰对系统的耦合通道、降低系统干扰信号的敏感性。具体措施是：在工程上可采用隔离、滤波、屏蔽、接地等方法。

1. 干扰的隔离

所谓干扰的隔离，是指从电路上把干扰源和易受干扰的部分隔离开来，使它们不发生电的联系。在变频调速传动系统中，通常是在电源和放大器电路之间的电源线上采用隔离变压器以免传导干扰，电源隔离变压器可应用噪声隔离变压器。

2. 设置滤波器

在系统线路中设置滤波器的作用是为了抑制干扰信号从变频器通过电源线传导干扰到电源电动机。为减少电磁噪声和损耗，在变频器输出侧可设置输出滤波器；为减少对电源干扰，可在变频器输入侧设置输入滤波器。若线路中有敏感电子设备，可在电源线上设置电源噪声滤波器以免传导干扰。在变频器的输入和输出电路中，除了上述较低的谐波成分外，还有许多频率很高的谐波电流，它们将以各种方式把自己的能量传播出去，形成对其他设备的干扰信号。滤波器就是用于削弱频率较高的谐波分量的主要手段。根据使用位置的不同，可分为以下几种。

(1) 输入滤波器：通常有以下两种。

- 线路滤波器。主要由电感线圈构成。它通过增大线路在高频下的阻抗来削弱频率较高的谐波电流。
- 辐射滤波器。主要由高频电容器构成。它将吸收频率很高的、具有辐射能量的谐波成分。

(2) 输出滤波器：也由电感线圈构成。它可以有效地削弱输出电流中的高次谐波成分，不但起到抗干扰的作用，而且能削弱电动机中由高次谐波电流引起的附加转矩。

对于变频器输出端的抗干扰措施, 必须注意: 变频器的输出端不允许接入电容器, 以免在逆变管导通(关断)瞬间, 产生峰值很大的充电(或放电)电流, 损害逆变管; 当输出滤波器由 LC 电路构成时, 滤波器内接入电容器的一侧, 必须与电动机侧相接。

3. 屏蔽干扰源

屏蔽干扰源是抑制干扰的最有效的方法。通常变频器本身用铁壳屏蔽, 减少其电磁干扰泄漏; 输出线最好用钢管屏蔽。特别是以外部信号控制变频器时, 要求信号线尽可能短(一般为 20 m 以内), 且信号线采用双芯屏蔽, 并与主电路线(AC380 V)及控制线(AC220 V)完全分离, 决不能放于同一配管或线槽内, 周围电子敏感设备线路也要求屏蔽。为使屏蔽有效, 屏蔽罩必须可靠接地。

4. 接地

在实际应用系统中, 由于系统电源零线(中线)与地线(保护接地、系统接地)不分及控制系统屏蔽地(控制信号屏蔽地和主电路导线屏蔽地)的混乱连接, 大大降低了系统的稳定性和可靠性。正确的接地既可以使系统有效地抑制外来干扰, 又能降低设备本身对外界的干扰。

对于变频器, 主回路端子的正确接地是提高变频器抑制噪声能力和减小变频器干扰的重要手段, 因此在实际应用中一定要非常重视。变频器接地导线的截面积一般应不小于 2.5 mm^2 , 长度控制在 20 m 以内。建议变频器的接地与其他动力设备接地点分开, 不能共地。

5. 采用电抗器

在变频器的输入电流中频率较低的谐波分量(5 次谐波、7 次谐波、11 次谐波、13 次谐波等)所占的比重是很高的, 它们除了可能干扰其他设备的正常运行之外, 还因为它们消耗了大量的无功功率, 使线路的功率因数大大降低。在输入电路内串入电抗器是抑制较低谐波电流的有效方法。根据接线位置的不同, 主要有以下两种。

(1) 交流电抗器: 串联在电源与变频器的输入侧之间。其主要功能如下。

- 通过抑制谐波电流, 将功率因数提高 0.75~0.85;
- 削弱输入电路中的浪涌电流对变频器的冲击;
- 削弱电源电压不平衡的影响。

(2) 直流电抗器: 串联在整流桥和滤波电容器之间。它的功能比较单一, 就是削弱输入电流中的高次谐波成分。但在提高功率因数方面比交流电抗器有效, 可达 0.95, 并具有结构简单、体积小等优点。

6. 合理布线

对于通过感应方式传播的干扰信号, 可以通过合理布线的方式来削弱。具体方法如下。

- (1) 设备的电源线和信号线应尽量远离变频器的输入、输出线。
- (2) 其他设备的电源线和信号线应避免和变频器的输入、输出线平行。

习 题 八

- 8.1 请简要阐述 PCB 布线的一般原则。
- 8.2 请阐述什么是 2-W 原则。
- 8.3 列举干扰信号的传播方式。



内 容 简 介

本书对电磁场与电磁兼容的基本理论做了系统介绍，全书共有 8 章，内容包括矢量分析及场论、静电场、恒定电场、恒定磁场、时变电磁场、电磁兼容基础、电磁兼容滤波器设计、PCB 的电磁兼容设计及应用。每章除本章小结外，还附有习题，供读者对相关内容做进一步探讨和复习巩固之用。习题解答和教学用 PPT 相关资料可在华信教育资源网（www.hxedu.com.cn）下载。

本书可以作为电子、通信、自动化控制等专业的“电磁场理论及应用”课程的本科生教材，也可以作为相近专业的教学参考书。



策划编辑：曲 昕

责任编辑：王春宁

封面设计：一克米工作室



ISBN 978-7-121-17518-3



9 787121 175183 >

定价：42.00元